UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE.
FACUTAD DE CIENCIA-
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y C.C.

CALCULO APLICADO

CUADERNOS TEMÁTICOS

CUADERNO #2 .- CALCULO DIFERENCIAL.

Prof. JORGE INOSTROZA LAGOS.
Magister en Matemática.
2009

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTEMENTO DE MATEMATICA Y C.C .

2009

Prof. Jorge Inostroza Lagos.

CUADERNO # 2: CÁLCULO DIFERENCIAL

INDICE. **Pág.**

2.1.-La Derivada de funciones en R

Definición:

Se llama **la derivada en el punto** x_0 **,** de la función real de variable real $f(x)$, al límite; Si existe:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

y se denota $f'(x_0)$.

Definición:

Se llama **la función derivada de** $f(x)$ a aquella que asocia a cada $x \in V(x_0)$, vecindad de x_0 ,el número $f'(x)$ como imagen y se le llama también *la derivada de* $f(x)$.

Observación:

Una función con derivada en x_0 se dice también *diferenciable en* x_0 y se dirá que es diferenciable en $V(x_0)$ si existe $f'(x), \forall x \in V(x_0)$.

Ejemplos:

1.- Calcular la derivada de $f(x) = k$ (función constante).en $x_{0.}$

Solución:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k - k}{h} = 0 \,.\, \forall x_0$$

Luego la derivada de la función constante es la función nula.

2.- Calcular la función $f'(x)$ si:

a) $f(x) = x$ b) $f(x) = x^2$ c) $f(x) = \sqrt{x}$ d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Solución:

a) $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$ b) $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2hx+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}2x+h=2x$

c) $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

d) $\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x-(x+h)}{h(x+h)x}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h)x}=-\frac{1}{x^2}=-x^{-2}$

e)

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{-2}-x^{-2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{x^2-(x+h)^2}{h(x+h)^2x^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2hx-h^2}{h(x+h)^2x^2}=\frac{-2x}{x^4}=-2x^{-3}$$

Observación:

Nótese que si $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha=0,1,2,\frac{1}{2},-2$, en todos los casos $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$. ¿Será una regla general para todo $\alpha\in IR$? Por el momento admitiremos que es así. En particular veamos si $\alpha\in IN$.

3.- Encontrar $f'(x)$ si $f(x)=x^n$; $\forall\ n\in IN$.

Solución:

Recurriendo al desarrollo del binomio de newton:

$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\binom{n}{1}x^{n-1}h+\binom{n}{2}x^{n-2}h^2+\cdots+\binom{n}{n}h^n\right]=\binom{n}{1}x^{n-1}$,al dividir por h solo el primer elemento que da libre de h. Luego $f'(x)=\binom{n}{1}x^{n-1}=nx^{n-1}$, $n\in IN$. Por lo tanto, si

$$n=1 \quad\Rightarrow\quad f'(x)=1$$
$$n=2 \quad\Rightarrow\quad f'(x)=2x$$
$$n=3 \quad\Rightarrow\quad f'(x)=3x^2$$

4.- Calcular la derivada en x_0 de $f(x) = sen(x)$.

Solución:

Hagamos $x_0 + h = x$, por lo tanto $h \to 0 \Leftrightarrow x \to x_0$ .y aplicando $\lim_{x \to 0} \frac{Senx}{x} = 1$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{sen(x) - sen(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{sen\left(\frac{x - x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)}{\frac{x - x_0}{2}} = \cos(x_0).$$

De igual forma se llega a que para $f(x) = Cosx \Rightarrow f'(x) = -Senx$

5.- Usando la definición probar que:

Si $f(x) = Sen^2 x \Rightarrow f'(x) = 2SenxCosx$.

Solución:

$$\lim_{h \to 0} \frac{sen^2(x+h) - sen^2(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(sen(x+h) + sen(x))(sen(x+h) - sen(x))}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (sen(x+h) + sen(x)) \frac{2\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) sen\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (sen(x+h) + sen(x)) 2\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) \frac{sen\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$$

$$= 2sen(x)\cos(x). \qquad Pues \ \lim_{h \to 0} \frac{Senh}{h} = 1$$

6.- Si $f(x) = e^x$, encontrar $f'(x)$.

Solución:

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{h+x} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x Ln(e) = e^x.$$

La derivada de la función $f(x) = e^x$ es la misma función.

Observación:

Hemos usado el límite conocido: $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = Ln(a)$.

7.- Si $f(x) = Ln(x)$ calcular $f'(x)$.

Solución:

$$\lim_{h \to 0} \frac{Ln(x+h) - Ln(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} Ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h \to 0} Ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h \to 0} \left[Ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{1}{x}} = Ln\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{x}$$

.

Hemos usado el límite clásico: $\lim_{h \to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e$.

Observación:

Como se ha encontrado la función derivada entonces podemos encontrar la derivada en un punto específico y ello se consigue evaluando la función obtenida en el punto pedido y esto es válido para cualquier función que admita función derivada.

Definición:

Para $f(x)$ en [a,b] se llama *derivada lateral derecha* de $f(x)$ en *a* y se denota $f'(a^+)$ al

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

Entendiéndose que $h \to 0^+$ por valores mayores que 0.

Se llama *derivada lateral izquierda* de $f(x)$ en *b* y se denota $f'(b^-)$ al

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}.$$

Aquí se entenderá que $h \to 0$ por valores negativos, o sea $h < 0$.

Una función $f(x)$ tiene derivada $f'(x_0)$ si y sólo si $f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$.

Ejemplo:

Sea $f(x) = |x|$, estudiemos $f'(0)$.

Solución

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|h+0|-|0|}{h} = 1 ; \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{|h+0|-|0|}{h} = -1$$

luego $f(x) = |x|$ no tiene derivada en $x_0 = 0$.

Teorema:

Si *f(x)* es diferenciable en x_0, entonces es continua allí.

Demostración: Si

$\exists\ f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \Rightarrow Como \quad f(x_0+h)-f(x_0) = h(\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h})$, luego, $\lim_{h \to 0} f(x_0+h)-f(x_0) = 0$ ó $\lim_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$, o sea la función es continua en el punto. Se advierte que la implicación es en un solo sentido o sea que siendo continua en un punto puede no ser diferenciable allí.

Observación:

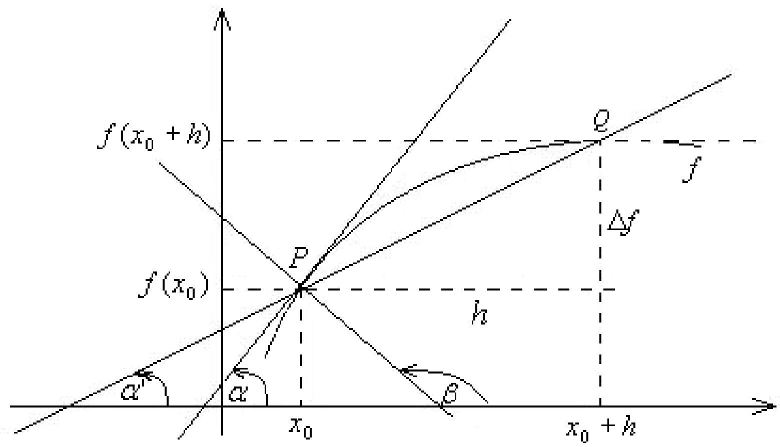
1.- Diremos que *f(x)* es diferenciable en *[a,b]* si lo es en cada punto de *(a,b)* y existen $f'(a^+)$ y $f'(b^-)$.

2.- El recíproco del teorema no es válido, el ejemplo lo da $f(x) = |x|$, en el punto cero.

2.1.1.- INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

Rectas tangente y normal.

Sea $y = f(x)$ una función definida en *(a,b)*, cuyo gráfico es la curva de la figura.



Sean $P:(x_0, f(x_0))$ y $Q:(x_0 + h, f(x_0 + h))$ puntos en la curva; la recta secante $\overline{PQ}$ tiene pendiente

$$tg(\alpha) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\Delta f}{h}.$$

Ahora si $h \to 0$, o sea, $Q \to P$, la recta secante tiende a confundirse en la *recta tangente a la curva en P;* cuya pendiente es $tg(\alpha)$, o sea

$$tg(\alpha) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0),$$

luego, ***geométricamente la derivada de una función en un punto*** x_0 ***representa el valor numérico de la pendiente de la recta tangente a la curva representada por la función en el punto.***

Por consiguiente, la *ecuación de la recta tangente será*

$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)}.$$

La recta perpendicular a la recta tangente en el mismo punto de tangencia se llama ***recta normal a la curva*** en el punto y si su pendiente es $tg(\beta)$ se tendrá

$$tg(\alpha)\cdot tg(\beta) = -1 \ \text{ ó } \ tg(\beta) = -\frac{1}{tg(\alpha)},$$

por lo que la ecuación de la recta normal a la curva en P_0 será

$$\boxed{y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)}.$$

Ejemplo:

Hallar el punto en la curva $y = x^2 - 8x + 18$ en que la tangente es horizontal.

Solución:

Tangente horizontal equivale a pendiente nula, o sea, $y'(x) = 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 4$; $y = 2$,como se trata de una parábola el punto P(4,2) es el vértice.(Vea la imagen)

Ejemplo:

Encontrar la ecuación de la recta tangente al gráfico de la función $y = x + \frac{1}{x}$ en el punto $x_0 = 1$ y $x_0 = 2$.

Solución:

$P_1 = (1,2)$ Pues $y(1) = 2$; $P_2 = (2;2{,}5)$,

$$y'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow y'(1) = 0 \Rightarrow tg(\alpha) = 0 \ \text{ ó } \ \alpha = 0.$$

Por lo tanto $y - 2 = y'(1)(x-1) = 0\,(x-1) \Rightarrow y = 2$ recta tangente horizontal.

Por otra parte $y'(2) = \frac{3}{4} \Rightarrow y - 2{,}5 = \frac{3}{4}(x-2)$ o bién $4y - 3x - 4 = 0$

que es la ecuación de la tangente.

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de $y = 3x^2 + 6$ en $x_0 = 1$.

Solución:

Si $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 9$; $y'(x_0) = 6x_0$, $y'(1) = 6$, luego la recta $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$ es de ecuación $y - 9 = 6(x - 1)$ ó $y - 6x - 3 = 0$.

Ejemplo:

Determinar los puntos en que las tangentes a la curva $y = 2x^3 + 13x^2 + 5x + 9$ pasan por el origen de coordenadas.

Solución:

Sea: $y' = 6x^2 + 26x + 5$**;** Como $y = mx$, es la ecuación de la recta tangente por el origen; como m es la pendiente, entonces $m = 6x_0{}^2 + 26x_0 + 5$, por lo tanto $y = (6x_0^2 + 26x_0 + 5)x$; rectas tangentes.

Se trata ahora de encontrar tales puntos x_0. Para ello consideremos en las rectas tangentes el punto de tangencia, o sea, hacemos $x = x_0$, luego

$$y(x_0) = (6x_0^2 + 26x_0 + 5)x_0 = 6x_0^3 + 26x_0^2 + 5x_0$$

este punto debe coincidir con aquel de la curva cuando $x = x_0$, también

$$6x_0^3 + 26x_0^2 + 5x_0 = 2x_0^3 + 13x_0^2 + 5x_0 + 9 \Rightarrow 4x_0^3 + 13x_0^2 - 9 = 0\,;$$

$x_0 = -1$**,** es una raíz encontrada por inspección, por lo tanto

$$4x_0^3 + 13x_0^2 - 9 = (4x_0^2 + 9x_0 - 9)(x_0 + 1)\,,$$

luego, $(4x_0^2 + 9x_0 - 9)(x_0 + 1) = 0$, resolviendo el paréntesis se tiene que

$$(x_0 + 3)\left(x_0 - \tfrac{3}{4}\right)(x_0 + 1) = 0\,.$$

Por lo tanto hay tres puntos $x_0 = -3$; $x_0 = \frac{3}{4}$ y $x_0 = -1$, una de esas tangentes es en $P_0(-3{,}57)$; $m = -19$ por lo tanto $y = -19x$.

Ejemplo:

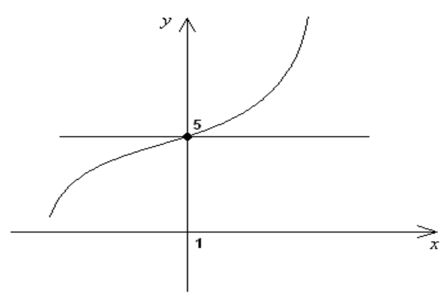
Hallar la ecuación de la recta tangente a $y = x^3 + 5$ en: a) $x = 0$, b) $x = 3$, c) el punto x_0, en que sea paralela a $y = 12x - 17$.

Solución:

a) $y'(x) = 3x^2$; $y'(0) = 0$, luego la recta es horizontal. Si $x = 0 \Rightarrow y = 5$ es la tangente horizontal.

b) $y'(3) = 27$; $y(3) = 32$ por lo tanto $y - 32 = 27(x - 3)$.

c) Ambos pendientes deben ser iguales, por lo tanto $12 = 3x_0^2 \Rightarrow x_0 = \pm 2$, luego son los puntos (2,13); (-2,-3).



Ejemplo:

En la curva $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 15$ encontrar los puntos en ella en que la recta tangente sea horizontal.

Solución:

¡Condición $f'(x) = 0$!

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

por lo tanto $x = 2 \wedge x = -1$; $f(2) = -5$ y $f(-1) = 22$, por lo tanto $P_1(2, -5)$ y $P_2(-1, 22)$ .son los puntos buscados

Ejemplo:

Pruebe que la curva $y = x^5 + 2x$ no tiene tangentes horizontales, ¿cuál es la pendiente mínima entre todas ellas?

Solución:

$y'(x) = 5x^4 + 2 = 0 \Rightarrow x^4 = -\frac{2}{5} \Rightarrow\Leftarrow$, luego no hay solución real y

como $y'(x) \geq 2\ \forall x$ .Entonces $y'(x) = 2$ sería el valor mínimo

Ejemplo:

Hallar las ecuaciones de la recta normal a la curva $y = x^3 + 5$ en el punto en que sea paralela a la recta $y = 12x - 17$.

Solución:

La pendiente de la recta es $m = 12$, luego la normal deberá ser

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0),$$

por lo tanto,

$$-\frac{1}{y'(x_0)} = -\frac{1}{3x_0^2} = 12 \Rightarrow x_0^2 = -\frac{1}{36},$$

por lo tanto $x_0 \notin IR$, luego no hay tal punto.

Ejemplo.

Verificar que la recta tangente a cada una de las cónicas se obtiene por desdoblamiento**.**

Solución:

Sea la circunferencia: $x^2 + y^2 = r^2$ y el punto (x_0, y_0) en ella, como

$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ $y'(x_0) = -\dfrac{x_0}{\pm\sqrt{r^2 - x_0{}^2}}$, así tangente será

$$y - y_0 = \mp \frac{x_0}{\sqrt{r^2 - x^2{}_0}}(x - x_0) \Rightarrow$$

$$(y - y_0)^2 (r^2 - x_0{}^2) = x_0{}^2 (x - x_0)^2 \quad o \quad (y - y_0)^2 y_0{}^2 = x_0{}^2 (x - x_0)^2$$

$$\therefore (y - y_0) y_0 = -x_0 (x - x_0) \Rightarrow yy_0 + xx_0 = x_0{}^2 + y_0{}^2 = r^2,$$

en definitiva la recta tangente queda:

$$yy_0 + xx_0 = r^2,$$

Lo que significa un desdoblamiento de la ecuación original para lograrla.

Si la ecuación fuera $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ con un cambio de variable queda: $X^2 + Y^2 = r^2$ el desdoblamiento nos da la recta tangente : $XX_0 + YY_0 = r^2$,regresando a las variables originales:

$$(x-h)(x_0 - h) + (y-k)(y_0 - k) = r^2,$$

es el desdoblamiento buscado.

Esto lo podemos extender a las elipses e hipérbolas:

$$b^2 (x-h)^2 \pm a^2 (y-k)^2 = a^2 b^2$$

En que las tangentes a un punto (x_0, y_0) de ellas el desdoblamiento nos da las rectas tangentes:

$$b^2 (x-h)(x_0 - h) \pm a^2 (y-k)(y_0 - k) = a^2 b^2.$$

Para el caso de la parábola: $y = 4px^2 \Rightarrow y'(x_0) = 8px_0$ luego la tangente es de ecuación:

$$(y - y_0) = 8px_0 (x - x_0) \Rightarrow \frac{y - y_0}{2} = 4pxx_0 - 4px_{0^2} = 4pxx_0 - y_0$$

Desarrollando esto se tiene:

$$\frac{y + y_0}{2} = 4pxx_0,$$

Siendo esto la forma desdoblada de la ecuación. Para la forma desplazada de la parábola el recurso ya está dado.

Otra interpretación de la derivada es en física, donde si $f(t)$ es la función posición de una partícula en el tiempo t; *la razón de cambio instantánea del espacio recorrido y el tiempo en que ello ocurre, define la velocidad de ésta,*

$$V(t) = f'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

De igual modo la *aceleración* es la razón de cambio instantánea de la velocidad respecto del tiempo

$$a(t) = V'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h}.$$

Ejemplo:

Un móvil se desplaza según la ley $S(t) = 5 + t - 2t^2$. Hallar la velocidad y aceleración en $t = 2$.

Solución:

$S'(t) = v(t) = 1 - 4t$; $v(2) = -7$ y $v'(t) = a(t) = -4$; $a(2) = -4$.

También pueden mencionarse otras significaciones de la derivada de una función en el campo de la ingeniería, de la economía, la medicina etc.

2.2.- ÁLGEBRA DE DERIVADAS

Teorema:

Sean *f*(*x*) y g(x) funciones definidas en (*a*,*b*) y diferenciables en $x_0 \in (a,b)$; entonces son diferenciables allí las funciones

1. $(f \pm g)(x)$,
2. $(f \cdot g)(x)$;
3. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$, $(g(x_0) \neq 0)$

y además,

a) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

b) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Demostración:

a).- Sea $h(x) = (f \pm g)(x) \Rightarrow$

$$\frac{h(x_0+k)-h(x_0)}{k} = \frac{(f \pm g)(x_0+k)-(f \pm g)(x_0)}{k}$$
$$= \frac{f(x_0+k)-f(x_0)}{k} \pm \frac{g(x_0+k)-g(x_0)}{k}.$$

Si $k \to 0 \Rightarrow \quad h'(x_0) = (f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$.

b).- Sea $h(x) = (fg)(x) \Rightarrow$

$$\frac{h(x_0+k)-h(x_0)}{k} = \frac{(fg)(x_0+k)-(fg)(x_0)}{k}$$
$$= \frac{f(x_0+k)g(x_0+k)-f(x_0)g(x_0)}{k}$$
$$= \frac{f(x_0+k)g(x_0+k)+f(x_0+k)g(x_0)-f(x_0+k)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{k}$$
$$= f(x_0+k)\frac{g(x_0+k)-g(x_0)}{k} + g(x_0)\frac{f(x_0+k)-f(x_0)}{k}.$$

Si $k \to 0 \Rightarrow \quad h'(x_0) = (fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$.

De aquí se deduce que $(\lambda f(x_0))' = \lambda f'(x_0)$, siendo λ una constante.

c).- Sea

$$h(x)=\left(\frac{f}{g}\right)(x)\Rightarrow$$

$$\frac{h(x_0+k)-h(x_0)}{k}=\frac{\frac{f}{g}(x_0+k)-\frac{f}{g}(x_0)}{k}$$

$$=\frac{1}{k}\left(\frac{f(x_0+k)}{g(x_0+k)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)$$

$$=\frac{1}{k}\left(\frac{g(x_0)f(x_0+k)-f(x_0)g(x_0+k)}{g(x_0+k)g(x_0)}\right)$$

$$=\frac{1}{k}\left(\frac{g(x_0)[f(x_0+k)-f(x_0)]-f(x_0)[g(x_0+k)-g(x_0)]}{g(x_0+k)g(x_0)}\right)$$

$$=\left(\frac{g(x_0)\left[\frac{f(x_0+k)-f(x_0)}{k}\right]-f(x_0)\left[\frac{g(x_0+k)-g(x_0)}{k}\right]}{g(x_0+k)g(x_0)}\right).$$

Si $k\to 0\Rightarrow\quad h'(x_0)=\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

De aquí se deduce como caso particular que $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)=-\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Con este teorema y el hecho que $(x^n)'=nx^{n-1}$ se deduce que:

a) Si $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\Rightarrow p'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}$.

b) Si $r(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ función racional $\Rightarrow$

$$r'(x)=\frac{p'(x)q(x)-p(x)q'(x)}{q^2(x)}.$$

Ejemplo:

Calcular $f'(x)$ aplicando álgebra de derivadas: a) $f(x)=tg(x)$, b) $f(x)=\sec(x)$ y c) $f(x)=\cos ec(x)$.

Solución:

a) $f(x)=\frac{sen(x)}{\cos(x)}\Rightarrow f'(x)=\frac{\cos^2(x)+sen^2(x)}{\cos^2(x)}=\sec^2(x).$

b) $f(x)=\dfrac{1}{\cos(x)} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{0+sen(x)}{\cos^2(x)}=tg(x)\sec(x).$

c) $f(x)=\dfrac{1}{sen(x)} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{0-\cos(x)}{sen^2(x)}=-ctg(x)\cos ec(x).$

Ejemplo:

Aplicando álgebra de derivadas hallar $f'(x)$ si: a) $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$, b) $f(x)=e^x tg(x)$ y c) $f(x)=\sqrt[3]{x}-3\cos(x)$.

Solución:

a) $f'(x)=\dfrac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}=\dfrac{2}{(1-x)^2}.$

b) $f'(x)=(e^x)'tg(x)+e^x(tg(x))'=e^x\sec^2(x).$

c) $f'(x)=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'-3(\cos(x))'=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}-3(-sen(x))-\dfrac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}+3sen(x).$

Ejemplo:

Calcular $f'(x)$ para: a) $f(x)=\ln(x)^{sen(x)}$ y b) $f(x)=\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$.

Solución:

Manejando las funciones

a) $f(x)=sen(x)\ln(x) \Rightarrow f'(x)=\cos(x)\ln(x)+sen(x)\dfrac{1}{x}.$

b) $f(x)=\dfrac{x}{x+1} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{(x+1)-x}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{(x+1)^2}.$

Observación:

Con lo aquí logrado se puede construir una importante y necesaria tabla de derivadas para el uso posterior.

2.3.- REGLA DE LA CADENA.

Se busca calcular la derivada de una función compuesta es decir de una función cuya variable es otra función de una variable, por lo que se le denomina “función de función” lo que se describe mediante el siguiente diagrama:

$$f : I \subset R \quad \to \quad R \;\; g : \mathrm{Rec}\, f \quad \to R$$
$$x \quad \to \quad y = f(x) \quad \to g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

Como se puede observar no es lo mismo $g \circ f$ que $f \circ g$, es decir la composición no es conmutativa como ya se señaló en una oportunidad anterior

Teorema: (Regla de la cadena)

Sean f y g funciones reales tales que $Dom\, g \subset \mathrm{Rec}\, f$ y que además f es diferenciable en $x_0 \in (a,b)$ y g es diferenciable en $y_0 = f(x_0) \in (f(a), f(b))$. Entonces

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x), \Leftrightarrow (g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

Demostración:

Se tiene la siguiente situación

$$(a,b) \xrightarrow{\quad f \quad} IR \xrightarrow{\quad g \quad} IR$$

$$x \longrightarrow f(x) = y \longrightarrow g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$
$$\xmapsto[g \circ f]{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Sea entonces $F(x) = g(f(x))$; $y_0 = f(x_0)$; $f(x_0 + h) = y_0 + k$,

$$\begin{aligned} F(x_0 + h) - F(x_0) &= g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0)) \\ &= g(y_0 + k) - g(y_0) \quad \Rightarrow \quad f(x_0 + h) - f(x_0) = k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} &= \frac{g(y_0 + k) - g(y_0)}{k} \cdot \frac{k}{h} \\ &= \frac{g(y_0 + k) - g(y_0)}{k} \cdot \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \end{aligned}$$

Si $h \to 0; \quad k \to 0 \quad \Rightarrow \quad F'(x_0) = (g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)\, f'(x_0),$ luego
$(g(f(x)))' = g'(f(x))\, f'(x).$

Observación:

Como $(g \circ f)'(x_0) = g'(f) \cdot f'(x)$, o sea, se deriva la función g respecto a la variable f que es una función y ésta respecto a la variable x, de ahí el nombre de la Regla de la Cadena.

Por extensión se deduce que $(g \circ f \circ h)'(x) = g'(f) \cdot f'(h) \cdot h'(x)$.

Ejemplo:

Calcular $f'(x)$ con Regla de la Cadena si:

a) $f(x) = (sen(x))^5$
b) $f(x) = (3x sen(x) - x^2)^{\frac{1}{2}}$
c) $f(x) = e^{3x^3}$
d) $f(x) = \ln(\sqrt{x})$
e) $f(x) = a^x$
f) $f(x) = x^x$
g) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x+1}}$
h) $f(x) = \cos(g(x))$
i) $f(x) = \ln(\sec^2(x))$
j) $f(x) = tg\left(e^{3x^2}\right)$
k) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$
l) $f(x) = (g(x))^{\alpha}; \quad \alpha \in IR$
m) $f(x) = sen(x))^5$
n) $f(x) = g(sen(x))$

Solución:

a) $f(x) = (sen(x))^5$ es una función compuesta, pues $x \xrightarrow{f} sen(x) = y \xrightarrow{g} y^5 = (sen(x))^5$, luego $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x)$, pero como $g(y) = y^5$, $g'(y) = 5y^4$ y como $y = sen(x), \quad g'(y) = 5(sen(x))^4$, ahora $f'(x) = \cos(x),$

$$(g \circ f)'(x) = 5(sen(x))^4 \cos(x).$$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{2}(3x sen(x) - x^2)^{-\frac{1}{2}}(3sen(x) + 3x\cos(x) - 2x)$.

c) Aquí debemos derivar la función $y = e^u$,

$$y'(x) = y'(u)u'(x) = e^{3x^3}\, 9x^2 .$$

d) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x}$, también si

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x}.$$

e) Aquí aplicamos primero logaritmo para luego usar la regla de la cadena;

$\ln(f(x)) = x\ln(a)$, derivando,

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = 1\ln(a) \Rightarrow f'(x) = f(x)\ln(a) = a^x \ln(a).$$

f) Con el mismo recurso:

$\ln(f(x)) = x\ln(x)$, derivando,

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = \ln(x) + x\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = f(x)(\ln(x)+1) = x^x(\ln(x)+1).$$

g) Si $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x+1}} \Rightarrow \ln(f(x)) = \frac{1}{2}(3\ln(x) - \ln(x+1))$, por lo tanto,

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2x+3}{x(x+1)}\right)$$

$$f'(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x+1}}\left(\frac{2x+3}{2x(x+1)}\right).$$

h) Si $f(x) = \cos(g(x))$ la regla de la cadena da $f'(x) = -sen(g(x))g'(x)$.

j) Aquí la regla tiene mas de 2 componentes,

$$f'(x) = \sec^2\left(e^{3x^2}\right)e^{3x^2}\, 6x.$$

l) $f'(x) = \alpha(g(x))^{\alpha-1} g'(x)$.

m) Aquí $g(x)$ no se da, por lo tanto $f'(x) = \cos(g(x))g'(x)$.

n) $f'(x) = g'(sen(x))\cos(x)$. Se ve que no son iguales estos dos últimos ejemplos.

Ejemplo:

Hallar $y'(x)$ *si* $y = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}$ *donde* $u = \sqrt[3]{x^2 + 2}.$

Solución:

La regla de la cadena señala:

$y'(x) = y'(u) \cdot u'(x) \Rightarrow y'(u) = \dfrac{2u(u^2+1) - 2u(u^2-1)}{(u^2+1)^2} = \dfrac{4u}{(u^2+1)^2}$ y

$u'(x) = \dfrac{1}{3}(x^2+2)^{-2/3} 2x \Rightarrow y'(x) = \dfrac{4u \cdot 2x}{3(u^2+1)^2 (x^2+2)^{2/3}}$, silo que se busca en representar todo en respecto a la variable x bastará reemplazar la función $u(x)$

Ejemplo:

Un punto se mueve a lo largo de la curva: $y = x^3 - 3x + 5$, donde $x = \dfrac{\sqrt{t}}{2} + 3$, (t es tiempo) ¿Qué velocidad alcanza si t = 4?.

Solución:

La regla de la cadena y entendiendo que la velocidad es la derivada de la trayectoria respecto del tiempo se tendrá: $v(t) = y'(t) = y'(x) \cdot x'(t) \Rightarrow v(t) = (3x^2 - 3) \cdot \dfrac{1}{4\sqrt{t}}$ .Si t = 4 , x = 4, luego $v(4) = (45) \cdot \dfrac{1}{8}$.

Ejemplo:

Usando log. y regla de la cadena calcular $f'(x)$ si:

a) $f(x) = x^{sen(x)}$

b) $f(x) = x^{x^x}$

c) $f(x) = sen(x^x)$

d) $f(x) = (g(x))^{h(x)}$

e) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^2(x+2)^2}{(x-1)}}$.

Solución:

a) $\ln(f(x)) = sen(x)\ln(x) \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \ln(x)\cos(x) + \dfrac{sen(x)}{x}$, por lo tanto,

$$f'(x) = x^{sen(x)}\left(\ln(x)\cos(x) + \frac{sen(x)}{x}\right).$$

b) $\ln(f(x)) = x^x \ln(x) \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = (x^x)'\ln(x) + x^x \dfrac{1}{x}$, pero en ejemplo anterior $(x^x)' = x^x(\ln(x+1))$, por lo tanto,

$$f'(x) = f(x)\left(x^x(\ln(x+1))\ln(x) + x^{x-1}\right) \text{ ó } f'(x) = x^{x^x}\left(x^x(\ln(x+1))\ln(x) + x^{x-1}\right).$$

c) $f'(x) = \cos(x)^x (x^x)' = \cos(x^x)(x^x(\ln(x+1)))$.

d) $\ln(f(x)) = h(x)\ln(g(x)) \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = h'(x)\ln(g(x)) + \dfrac{1}{g(x)} g'(x)$.

e) $\ln(f(x)) = \dfrac{1}{3}\left(\ln(x^2(x+2)^2) - \ln(x-1)\right) = \dfrac{1}{3}\left(2\ln(x) + 2\ln(x+2) - \ln(x-1)\right)$, por lo tanto,

$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{x+2} - \dfrac{1}{x-1}\right) \Rightarrow f'(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^2(x+2)^2}{x-1}}\left(\dfrac{x^2-2x-4}{3x(x+2)(x-1)}\right)$.

Ejemplo:

Si $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in IR$, hallar $f'(x)$.

Solución:

Recordemos que esto estaba pendiente,

$$\ln(f(x)) = \alpha\ln(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow f'(x) = f(x)\alpha x^{-1}$$

ó $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$. Ahora si $f(x) = x^{\sqrt{2}} \Rightarrow f'(x) = \sqrt{2}x^{(\sqrt{2}-1)}$.

2.4.- DERIVADA DE UNA FUNCIÓN INVERSA

Si $f: D \subset IR \to IR$ y $f^{-1}(y)$ es su inversa $\Rightarrow f \circ f^{-1} = I$, es decir

$$f\left(f^{-1}(y)\right) = y \text{ ó } f^{-1}(f(x)) = x.$$

Para calcular $\left(f^{-1}\right)'(y)$ derivamos respecto a y en $f\left(f^{-1}(y)\right) = y \Rightarrow$ aplicando la regla de la cadena $f'\left(f^{-1}\right)\cdot\left(f^{-1}(y)\right)' = 1$ ó

$$f'(x) \cdot \left(f^{-1}\right)'(y) = 1 \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Ejemplo:

Calcular la derivada de $y = \ln(x)$, considerada como inversa de la función exponencial.

Solución:

$y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^{y(x)}$ su inversa, luego derivamos respecto a *x*,

$$1 = e^{y(x)} \cdot y'(x) \Rightarrow y'(x) = e^{-y(x)} = e^{-\ln(x)} = \frac{1}{x}.$$

Ejemplo:

Calcular $y'(x)$ si: a) $y(x) = arcsen(x)$, b) $y(x) = \arccos(x)$ y c) $y(x) = arctg(x)$.

Solución:

a) $y = arcsen(x) \Leftrightarrow x = sen(y)$, por lo tanto $1 = \cos(y) \cdot y'(x) \Rightarrow \dfrac{1}{\cos(y)} = y'(x)$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - sen^2(y)}} = y'(x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = y'(x)(arcsen(x))' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

o aplicando directamente la fórmula,

$$(arcsen(x))' = \frac{1}{(sen(y))'} = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - sen^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

b) $y = \arccos(x) \Leftrightarrow x = \cos y(x)$, derivando respecto a *x*, $1 = -sen(y) \cdot y'(x) \Rightarrow$

$$y'(x) = -\frac{1}{sen(y)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

pues $sen(y) = \sqrt{1 - \cos^2(y)} - \sqrt{1 - x^2}$.

c) $y = arctg(x) \Leftrightarrow x = tg(y(x))$, derivando respecto a *x*, $1 = \sec^2(y) \cdot y'(x) \Rightarrow$

$$y'(x) = \frac{1}{\sec^2(y)} = \frac{1}{1 + x^2},$$

pues $\sec^2(y)=1+tg^2(y)=1+x^2$.

Ejemplo:

Si $y(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$,Calcular $x'(y)$ o sea la derivada de la inversa $f^{-1}(y)$

Solución:

a) Aplicando la fórmula:

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}\Rightarrow x'(y)=\frac{(x+2)^2}{2(x+2)-(2x-1)}=\frac{(x+2)^2}{5}$$

b) Encontrando la inversa y derivar.

$$y=\frac{2x-1}{x+2}\Rightarrow x=\frac{2y+1}{2-y}\therefore x'(y)=\frac{2(2-y)+(2y+1)}{(2-y)^2}=\frac{5}{(2-y)^2}.$$

Para comparar reemplazamos $y(x)$ en esta última.

Ejemplo:

Calcular la derivada de las funciones hiperbólicas inversas.

Solución:

a) Recordemos que $senh(x)=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$; $\cosh(x)=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ y $tgh(x)=\dfrac{senh(x)}{\cosh(x)}$,

luego se ve fácilmente que $senh'(x)=\cosh(x)$, $\cosh'(x)=senh(x)$, $tgh'(x)=\sec h^2(x)$.

b) Si $y=senh(x)\Rightarrow x=arcsenh(y)$, derivando respecto a *x*,

$$1=(arcsenh(y))'=\frac{1}{(senh(x))'}=\frac{1}{\cosh(x)}.$$

Pero $\cosh^2(x)-senh^2(x)=1$, por lo tanto $(arcsenh(y))'=\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$.

c) Si $y=tgh(x)\Rightarrow x=arctgh(y)$, derivando,

$$1=(arctgh(y))'=\frac{1}{(tgh(x))'}=\frac{1}{\sec h^2(x)}=\frac{1}{1-tgh^2(x)}=\frac{1}{1-y^2}.$$

2.5.- FUNCIONES PARAMÉTRICAS.

Una curva, cuya representación cartesiana se da como $y = f(x) \quad x \in I \subseteq R$,también puede ser expresada considerando tanto la abscisa como la ordenada del punto función de una nueva variable o parámetro tomando la forma:

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \quad ; \; a \le t \le b \end{aligned}$$

y es lo que llamamos la forma paramétrica de la función o la curva.Un tema interesante es llevarla de una forma a la otra.

Ejemplos:

1.- Expresar la curva paramétrica: $\begin{aligned} x &= t^2 - 2t \\ y &= t + 1 \end{aligned} \quad t \in R$

En la forma cartesiana :

Solución:

Se trata de eliminar el parámetro t de las ecuaciones paramétricas.Por tanto :

$x = (y-1)^2 - 2(y-1) \Rightarrow x = y^2 - 4y + 3$ que es una parábola.

2.- Expresar la elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,en forma paramétrica.

Solución.

Aquí el tema es la elección del parámetro, que en este caso será un ángulo para hacer

$$\begin{aligned} x &= aCost \\ y &= bSent \end{aligned}$$

De modo que se cumple la relación cartesiana.

3.- Parametrizar la curva cartesiana: $x = y^4 - 3y^2$.

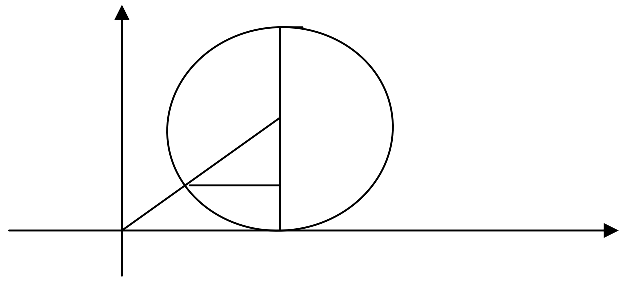
Solución.

Si tomamos como parámetro la variable y, cosa que es aceptable, la expresión será:

$$\begin{aligned} x &= t^4 - 3t^2 \\ y &= t \end{aligned}$$

4.- La cicloide es una curva que describe un punto fijo en la circunferencia de radio a cuando rueda sobre un eje.Si el parámetro es el ángulo que se muestra en la figura ,las ecuaciones paramétricas se pueden deducir de ello.

Solución.



2.5.1.-DERIVADA DE FUNCIONES PARAMÉTRICAS

Siendo $y = f(x) \Leftrightarrow x = x(t),\ y = y(t)$ es su forma paramétrica, luego $y(t) = f(x(t))$, derivando con regla de la cadena, $\Rightarrow y'(t) = f'(x) \cdot x'(t)$, por lo tanto

$$f'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Ejemplo:

Si la curva es

$$\begin{aligned} x &= a\cos(t) \\ y &= asen(t); \quad y > 0 \end{aligned}$$

la derivada será $f'(x) = \dfrac{a\cos(t)}{-asen(t)} = -\dfrac{\cos(t)}{sen(t)} = -ctg(t)$, en forma cartesiana es $y = \sqrt{a^2 - x^2}$

$$\Rightarrow y'(x) = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{y} \Leftrightarrow \frac{-a\cos(t)}{asen(t)} = -\frac{\cos(t)}{sen(t)} = -ctg(t).$$

Ejemplo:

Sean las funciones

$$x = a\cos(t)$$
$$y = bsen(t); \quad y = f(x)$$ su forma cartesiana, ¿cuál es $f'(x)$?.

Solución:

Como: $\frac{x}{a} = Cos(t)$; $\frac{y}{b} = Sen(t) \Rightarrow (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1 \therefore y(x) = \pm b\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}$

$$f'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} \Rightarrow f'(x) = \frac{b\cos(t)}{-asen(t)} = -\frac{b}{a}ctg(t).$$

Ejemplo:

Si la función $y = f(x)$ está dada paramétricamente como

$$x = 2 + 3\cos(2t)$$
$$y = 4 + 3sen(2t)$$

a) Hallar su forma cartesiana y b) Su derivada.

Solución:

a) $(x-2)^2 = 9\cos^2(2t)$, $(y-4)^2 = 9sen^2(2t)$, por lo tanto $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 9$ circunferencia centro (2,9) y radio 3.

b) $y'(x) = -\frac{3\cos(2t)2}{3sen(2t)2} = -\frac{\cos(2t)}{sen(2t)} = -\frac{x-2}{y-4}$. Por otro lado vemos que

$$y = 4 \pm \sqrt{9-(x-2)^2} \Rightarrow y'(x) = \frac{-(x-2)}{\pm\sqrt{9-(x-2)^2}} = -\frac{(x-2)}{(y-4)}.$$

Ejemplo:

Un punto se mueve en el plano de acuerdo con la ecuación:

$x = t^2 + 2t \qquad y = 2t^3 - 6t.$ Hallar $y'(x)$ si $t = 0; t = 2; t = 5$.

Solución.

Como $y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{6(t^2-1)}{2(t+1)}$, luego evaluamos en los puntos-

$y'(0) = -3; y'(2) = 3; y'(5) = 2$

2.6.- DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN.

Si $f(x)$ diferenciable en x_0

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) \Leftrightarrow \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)+\eta; \quad \ni \eta \to 0 \quad \text{si} \quad h \to 0;$$

por lo tanto $f(x_0+h)-f(x_0) = hf'(x_0)+\eta h$ o si $x_0+h=x$

$$f(x)-f(x_0) = (x-x_0)f'(x_0)+\eta(x-x_0); \ \ni \eta \to 0 \quad si \quad x \to x_0$$

$\Leftrightarrow$ si $\Delta x = x - x_0$ ó $\Delta x = h$ y $\Delta f(x_0) = f(x)-f(x_0)$.

$$\Delta f(x_0) = \Delta x f'(x_0)+\eta\Delta x \quad \ni \eta \to 0 \quad si \quad \Delta x \to 0.$$

Definición:

Se llama *diferencial de una función* en x_0 a la expresión

$$df = \Delta x f'(x_0) \text{ ó } df = (x-x_0)f'(x_0) \text{ ó } df = hf'(x_0).$$

Observación:

Si $y = f(x)$ y si

$$f(x) = x \Rightarrow df = dx$$
$$df = \Delta x \cdot f'(x) = \Delta x$$

implica que $dx = \Delta x$. Luego $df = f'(x_0)dx$ y hacemos $df = dy$,

$$dy = f'(x_0)dx \Leftrightarrow df = f'(x_0)dx,$$

por lo tanto

$$\frac{df}{dx} = f'(x_0) \text{ (Notación de Leibnitz para la derivada).}$$

Luego al final queda:

$$\Delta f(x_0) = df(x_0)+\eta\Delta x \text{ o como } \Delta f(x_0) = f(x)-f(x_0),$$

$$f(x) = f(x_0)+df(x_0)+\eta\Delta x,$$

por lo tanto: $f(x) \approx f(x_0) + df(x_0)$, o sea, el valor de *f* en un punto cercano a x_0 es aproximadamente el de $f(x_0) + df(x)$ y esto nos permite hacer cálculos aproximados de funciones.

Ejemplo:

Computar $(3{,}05)^2$ aproximadamente.

Solución:.

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ &\approx f(x_0) + df(x_0) \end{aligned}$$

Si $f(x) = x^2$; $x_0 = 3$; $x - x_0 = 0{,}5$,

$$\begin{aligned} (3{,}05)^2 &\approx f(3) + 2x(3)(3{,}05 - 3) \\ &\approx 9 + 2 \cdot 3 \cdot 0{,}05 \\ &\approx 19{,}3 \end{aligned}$$

Ejemplo:

Calcular la diferencial de $f(x) = x^3 + 2x$ para $x = 1$, $h = 0{,}2$.

Solución:

Como $df = f'(x_0) \cdot h$,

$$f'(x) = 3x^2 + 2; \quad f'(x_0) = 3 \cdot 1^2 + 2 \Rightarrow df = 5 \cdot (0{,}2) = 1$$

Ejemplos:

Calcular la diferencial df en

a) $f(x) = tg(x)$

b) $f(x) = a^x$

c) $f(x) = \ln(x)$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2}$

e) $f(x) = arcsen(x)$

f) $f(x) = e^x + \cos(x)$

Solución:

a) $f'(x) = \sec^2(x) \Rightarrow \dfrac{df}{dx} = \sec^2(x) \quad \Rightarrow \quad df = \sec^2(x)dx$

b) $f'(x) = a^x \ln(a) \Rightarrow \dfrac{df}{dx} = a^x \ln(a) \quad \Rightarrow \quad df = a^x \ln(a)dx$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow \dfrac{df}{dx} = \dfrac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad df = \dfrac{1}{x}dx$

d) $f'(x) = \dfrac{x^2 \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - 2x\sqrt{x+1}}{x^4} = \dfrac{x^2 - 4x(x+1)}{2x^4\sqrt{x+1}} = \dfrac{-3x^2 - 4x}{2x^4\sqrt{x+1}} = -\dfrac{3x+4}{2x^3\sqrt{x+1}}$

$$\Rightarrow df = -\frac{3x+4}{2x^3\sqrt{x+1}}dx$$

e) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow df = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

f) $f'(x) = e^x - sen(x) \Rightarrow df = (e^x - sen(x))dx$

Observación:

Si $f(x)$ es una función, entonces como $df = f'(x)dx$, se tendrá:

a) $d(k) = 0,\ k$ constante.

b) $d(x^n) = nx^{n-1}dx$

c) $d(f+g) = df + dg = (f'(x) + g'(x))dx$

d) $d(f \cdot g) = fdg + gdf = (fg' + f'g)dx$

e) $d\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{gdf \cdot fdg}{g^2}$

f) $d(f \circ g) = df(g) \cdot dg(x)$

2.7.- DERIVACIÓN DE FUNCIONES IMPLÍCITAS.

Sea $F(x,y) = 0$ una ecuación que define en forma implícita la función $y = f(x)$, es decir,

$$F(x, f(x)) \equiv 0.$$

Para calcular $f'(x)$ sin expresar en forma explícita la función $y = f(x)$, lo hacemos usando la regla de la cadena aplicada a la ecuación.

Ejemplo:

$x^2 + y^2 = r^2$, si existe $y(x)$ calcular $y'(x)$.

Solución:

Sea $x^2 + y^2(x) = r^2$,

$$x^2 + y^2(x) = r^2 \ \Big| \ \frac{d}{dx}$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Si expresamos en forma explícita a la función se tendrá

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \ \Big| \ \frac{d}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = -\frac{x}{y}.$$

Ejemplo:

Sea $(y-3)^2 = (x+1)$, aceptamos que existe la función $y = f(x)$ y $x = g(y)$. Encontrar y'(x) y x ´(y).

Solución:

Para encontrar $y'(x)$:

$$(y-3)^2 = (x+1) \ \Big| \ \frac{d}{dx}$$

$$2(y-3)\frac{dy}{dx} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(y-3)}$$

Para encontrar $x'(y)$:

$$(y-3)^2 = (x+1) \ \Big| \ \frac{d}{dy}$$

$$2(y-3) = \frac{dx}{dy}$$

como se puede ver: $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$

Ejemplo:

Demostrar que si *c* es una constante cualquiera, entonces $x^2y - xy^2 = c$ satisface la *ecuación diferencial*

$$(2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy = 0$$

en el sentido que la expresión para *dy* y *dx* obtenidas de la ecuación primera al sustituirse en la ecuación diferencial, esta se convierte en una identidad.

Solución:

Diferenciando la ecuación dada, $x^2y - xy^2 = c$ se tiene:

$$2xydx + x^2dy - y^2dx - 2xydy = dc = 0$$
$$(2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy = 0.$$

Es lo mismo que $x^2y - xy^2 = c$ satisface

$$(2xy - y) + (x^2 - 2xy)\frac{dy}{dx} = 0.$$

2.8.- DERIVADA DE ORDEN SUPERIOR

Definición:

Si $f(x)$ es una función que admite derivada en $V(x)$ (vecindad del punto *x*), la función derivada de $f'(x)$ se llama la segunda derivada de $f(x)$ y se denota

$$f''(x) \text{ ó } \frac{d^2f}{dx^2}.$$

Observación:

De igual modo se define la *n*-ésima derivada de $f(x)$, o sea

$$f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}f^{(n-1)}(x) = \frac{d^nf}{dx^n}.$$

Ejemplo:

Encontrar $\frac{d^2f}{dx^2}$ para $f(x) = x^2 + sen(x)$.

Solución:

$$\frac{df}{dx} = 2x + \cos(x)$$
$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}(2x + \cos(x)) = 2 - sen(x)$$

Ejemplo:

Encontrar $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$ para la función $sen(x+y)=x$

Solución:

Se trata de función implícita. Derivando la ecuación

$$\cos(x+y)\cdot(1+y')=1 \quad \Big| \quad \frac{d}{dx}$$

$$-sen(x+y)(1+y')(1+y')+\cos(x+y)(0+y'')=0$$

$$-(1+y')^2 sen(x+y)+y''\cos(x+y)=0$$

como $\quad y'=\dfrac{1}{\cos(x+y)}-1 \Rightarrow$ al sustituir en

$$y''\cos(x+y)=(1+y')^2 sen(x+y)$$

$$y''=\frac{sen(x+y)}{\cos(x+y)}\left(1+\frac{1}{\cos(x+y)}-1\right)^2$$

$$y''=\frac{sen(x+y)}{\cos^3(x+y)}$$

Ejemplo:

Si $y=x^n$, calcular $y^{(n)}(x)$.

Solución:

$$y'(x)=nx^{n-1}$$

$$y''(x)=n(n-1)x^{n-2},$$

$$-----------------------$$

$$y^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)\cdots 1=n!$$

luego $y^{(n)}=n!$ si $y(x)=x^n$. Por lo tanto: $f^{(n+1)}(x)=0$ si $f(x)=x^n$.

Ejemplo.

Si f(x) = Sen (x) . Hallar n-ésima derivada.

Solución:

$f'(x) = Cosx \qquad f''(x) = -Senx$

$f'''(x) = -Cosx \qquad f^{iv}(x) = Senx$

$f^{v}(x) = f'(x) \qquad f^{vi}(x) = f''(x) \Rightarrow \quad f^{(2n-1)}(x) = (-1)^{n+1} Cosx$

$f^{(2n)}(x) = (-1)^{n} Senx$

Ejemplo:

Si c_1 y c_2 son constantes, entonces $(y-c_2)^2 = 4a(x-c_1)$ satisface la ecuación diferencial:

$$2ay''(x) + y'^2(x) = 0\ .$$

Solución:

$(y-c_2)^2 = 4a(x-c_1)$ si derivamos queda $2(y-c_2)y' = 4a$, si derivamos de nuevo resulta $2y'^2 + 2(y-c_2)y'' = 0$, como

$$y' = \frac{2a}{y-c_2} \Rightarrow y'' = -\frac{y'^2}{y-c_2} = \frac{-2a}{(y-c_2)^2}$$

luego $2ay'' + y'^2 = -\dfrac{4a^2}{(y-c_2)^2} + \dfrac{4a^2}{(y-c_2)^2} = 0.$

Ejemplo:

Sea $f(x) = x|x|$. Demostrar que $f'(x)$ existe para todo $x \in IR$; que $f''(x)$ existe si $x \neq 0$ pero $f''(0)$ no existe. Aproxime gráficos de $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$.

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \geq 0 \\ -x^2 & si\ x < 0 \end{cases}$$

luego

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & si\ x \geq 0 \\ -2x & si\ x < 0 \end{cases} = |2x|$$

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & si\ x \geq 0 \\ -2 & si\ x < 0 \end{cases}$$

Según problema anterior se tiene que no existe $f''(0)$.

Teorema (Leibnitz):

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(n-k)} f^{(k)}.$$

Demostración:

Inducción: $n = 1$.

$$(f \cdot g)' = fg' + gf' = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} g^{(1-k)} f^{k}.$$

Hipótesis:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \binom{n}{0} g^{(n)} + \binom{n}{1} g^{(n-1)} f' + \cdots + \binom{n}{k-1} g^{(n-k+1)} f^{(k-1)} + \binom{n}{k} g^{(n-k)} f^{(k)}$$

Tesis:

$$(f \cdot g)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} g^{(n+1-k)} f^{(k)}.$$

Al derivar la hipótesis, el término en $g^{(n+1-k)} f^{(k)}$ se logra en una parte de la derivación de

$\binom{n}{k-1} g^{(n-k+1)} f^{(k-1)} + \binom{n}{k} g^{(n-k)} f^{(k)}$ y su coeficiente es $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

2.9.-Guía de Ejercicios

1.- Calcule la derivada de

a) $f(x) = (2x+1)sen(x)$

b) $f(x) = \dfrac{2x+1}{sen(x)}$

c) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

2.- Encuentre $\frac{d}{dx}$ si

a) $x^2 + y^2 = 2x$

b) $xsen(x)y = 2$

c) $xy = 1$

d) $y + \cos(3x) = xy$

e) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{26} = 1$

f) $\sqrt{x} + \sqrt{2y} = 3$

3.- Encuentre la pendiente de la recta tangente al gráfico de la ecuación dada en el punto señalado:

a) $x^2 - y^2 = 16; \quad x = -4$, 2do. cuadrante.

b) $xy^2 = 10; \quad y = -2.$

c) $xy = -1; \quad x = -1.$

4.- Demostrar que si c es una constante, entonces:

a) $\frac{x^2 + y^2}{xy^2} = c$ satisface $y(x^2 - y^2)dx - 2x^3dy = 0$.

b) $ax^4 + 4x^3y + y^4 = c$ satisface $x^2(ax + 3y)dx + (x^3 + y^3)dy = 0.$

c) $\frac{y(1 + sen(x))}{\cos(x)} = x + c$ satisface $(1 - y - sen(x))dx - \cos(x)dy = 0.$

5.- Demostrar las fórmulas:

a) $\frac{d}{dx} arc\sec(u(x)) = \frac{u'(x)}{u(x)\sqrt{u^2(x) - 1}}$

b) $\frac{d}{dx} \text{arccos}ec(u(x)) = -\frac{u'(x)}{u(x)\sqrt{u^2(x) - 1}}$

c) $\frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{ac}} arctg\left(x\sqrt{\frac{a}{c}}\right) = \frac{1}{ax^2 + c}; \quad ac > 0$

d) $\frac{d}{dx} \frac{1}{a} arctg\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a^2 + x^2}$

e) $\frac{d}{dx} \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} arctg\left(\frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}}\right) = \frac{1}{ax^2 + bx + c}$

f) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{4a}\sqrt{1-a^2x^2}-\frac{1}{4a^2}arcsen(ax)+\frac{x^2}{2}arcsen(ax)\right)=xarcsen(ax)$

6.- Encuentre $f'(x)$ para:

a) $f(x)=arctg(\sqrt{x})$

b) $f(x)=\arccos(sen(x))$

c) $f(x)=\frac{\arccos ec(x)}{\cos ec(x)}$

d) $f(x)=arcsen^{\frac{3}{2}}\left(x^{\frac{2}{3}}\right)$

e) $f(x)=\arccos(x)\arccos(2x)$

f) $f(x)=tg(arc\cot(x))$

7.- Determinar $f'(x)$ para:

a) $f(x)=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

b) $f(x)=\frac{1}{x}\log(x^2+1)$

c) $f(x)=arctg(\log|x|)$

d) $f(x)=\log(\log(\log(x)))$

e) $f(x)=x^{x^x}$

8.- Use logaritmo para obtener:

a) $\frac{d}{dx}\left(\frac{(2x^2+3)\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^3+1}}\right)$

b) $\frac{d}{dx}\left(10^{arctg(x)}\right)$

9.- Calcular:

a) $\frac{d}{dx}arcsenh(\sqrt{x})$

b) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arccos}h(senh(x))$

c) $\dfrac{d}{dx}(\log(senh(x)))$

d) $\dfrac{d}{dx}(\cosh(x))(senh(x))$

e) $\dfrac{d}{dx}(\arccos(x))(\operatorname{arccos}h(x))$

10.- Sea $f = g \circ h$; $h(2) = 6$; $h'(2) = -10$ y $g'(6) = -\dfrac{1}{2}$. Encuentre $f'(2)$.

11.- Si $f(x) = \sqrt{2x-1}$ encuentre directamente la derivada de su inversa.

12.- Encuentre la ecuación de la recta tangente al gráfico de $y = \dfrac{x^4-2}{x^5+1}$ en $x = 0$.

13.- Sea $y = \dfrac{3x}{(x-2)(x+1)}$. Pruebe que la derivada en todo punto es negativa.

14.- Considere una tangente a la curva $x^n + y^n = a^n$, $n \neq 1$, $n \neq 0$. Suponga que dicha tangente intersecta al eje *x* en (p,0) y al eje *y* en (q,0). Muestre que

$$\frac{1}{p^{\frac{n}{n-1}}} + \frac{1}{q^{\frac{n}{n-1}}} = \frac{1}{a^{\frac{n}{n-1}}}.$$

15.- Calcule $\dfrac{d^2}{dx^2}(x\, arcsenh(x^2))$

16.- Calcule $\dfrac{d^2}{dx^2}(\cosh^3(2x))$

17.- Si $y = sen(m\, arcsen(x))$, probar que satisface a la ecuación $(1-x^2)y''-xy'+m^2y = 0$.

18.- Si $y = \left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right)^n$, probar que satisface $(x^2+a^2)y''+xy'-n^2y = 0$.

19.- Si $y = 1 - x^2 arcsen(x)$ mostrar que $(1+x^2)y'+xy = 1-x^2$ y cuando $n \geq 2$

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - (2n+1)xy^{(n+1)} - (n^2-1)y^{(n)} = 0.$$

20.- Encontrar la cuarta derivada de $y = \dfrac{1+3x}{2-3x-2x^2}$.

21.- Sea $k(x) = x^3h(x)$, $h(1) = 3$, $h'(1) = \dfrac{1}{2}$, $h''(1) = 4$, encontrar $k''(1)$.

22.- Sea $f(x) = x^{-1}$. Encontrar $f^{(n)}(x)$, $n \in IN$.

23.- Si $f(x) = x^2 a^x$, encontrar $f^{(n)}(x)$.

2.10.- APLICACIONES DE LA DERIVADA

En la interpretación geométrica de la derivada, encontramos una primera aplicación, como así también el concepto de velocidad y aceleración en Física

2.10.1- La derivada como Razón de Cambio

La derivada de una función puede entenderse como "**la razón de cambio instantáneo entre la función y la variable",** puesto que

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

Donde $f(x+h) - f(x)$ ó $f(x) - f(x_0)$ es la Variación de la Función y h *ó(* x- x_0 *)* es la Variación de la Variable. Esta visión de la derivada nos lleva a resolver problemas de diferente naturaleza. Comenzando por recordar que si S(t) es la ecuación del movimiento de un móvil la "razón de cambio instantánea " del espacio recorrido respecto del tiempo empleado nos entrega la velocidad del móvil o de la variación de la velocidad que depende del tiempo y la variación de éste nos entrega la aceleración.

Ejemplos.

1.- Una piscina con V galones de volumen en un momento "t" está dado por :$V = 250(40-t)^2$;Está siendo evacuada. Encontrar la velocidad con que disminuye el volumen luego de 5 minutos del proceso.

Solución.

Siendo :

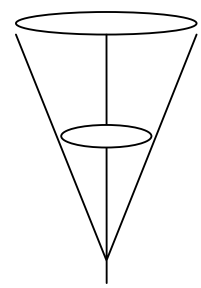
$$V(t) = 250(40-t)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = 500(40-t)(-1)$$

$$si \;\; t = 5 \;\; \Rightarrow \frac{dV(5)}{dt} = 500 \cdot 35 \cdot (-1) = -17.500 \quad gall/\min$$

2.- Un estanque tiene la forma de un cono invertido con 16 pié de altura y con un radio de 4 pié. ¿Qué tan rápido cae el nivel cuando el agua lleva 5 pié de profundidad y fluye a razón de 2pié/seg.?.

Solución.

Se pide la razón de cambio de la altura en relación al tiempo, en t = 5



$V(t)=\frac{1}{3}\pi r^2(t)\cdot h(t)$**.** Según la fig. $\frac{r(t)}{h(t)}=\frac{4}{16}\Rightarrow r(t)=\frac{1}{4}h(t)$

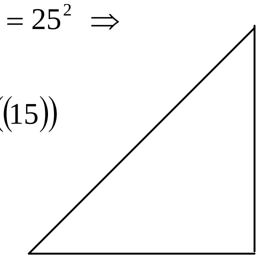
$V(t)=\frac{\pi}{48}h^3(t)\Rightarrow V'(t)=\frac{3\pi}{48}\cdot h^2(t)\cdot h'(t)$. Cuando t = 5

$$2=\frac{\pi}{16}\cdot 25\cdot h'(5)\Rightarrow \quad h'(5)=\frac{32}{25\pi}\ \ pié/seg\ .$$

3.- Una escalera de 25 pié de largo, se apoya contra un muro vertical, si la base de ella se desplaza a razón de 3pié/seg.¿Cuál es la velocidad de disminución de la altura cuando la base se encuentra a 15 pié del muro?

Solución.

Se trata de encontrar $y(t)$ sabiendo que por la fig. $x^2(t)+y^2(t)=25^2\ \Rightarrow$



$y(t)=\sqrt{625-x^2(t)}\quad \therefore \quad y'(t)=-\frac{x(t)\cdot x'(t)}{\sqrt{625-x^2(t)}}$ como $x'(t)=3\ \ xt((15))$

$$y'(t_0)=-\frac{15\cdot 3}{\sqrt{625-225}}=\frac{-9}{4}.$$

4.- Una bola de nieve se va formando de modo que su volumen aumenta a razón de $8\,pié^3/\min$ .Encontrar la razón de cambio instantánea del radio en el tiempo cuando el radio mide 2 pié.

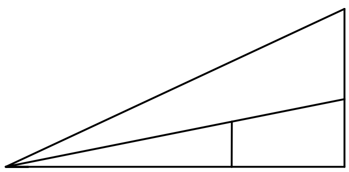
Solución.

$$V(t)=\frac{4}{3}\pi\cdot r^3(t) \quad\Rightarrow\quad \frac{dV}{dt}=4\pi\cdot r^2(t)\cdot r'(t) \quad\Rightarrow\quad 8=4\pi\cdot 16\cdot r'(t)$$

$$r'(t)=\frac{1}{8\pi}\ pié/\min$$

5.- Un hombre de 6 pié de altura camina hacia un muro a 5pié/seg. Si existe un reflector en el piso a 50 pié del muro. ¿Con qué velocidad se acorta la sombra del hombre al momento que está a 30 pié del muro?

Solución.



$$\frac{50}{x}=\frac{h}{6}\Rightarrow h(t)=\frac{300}{x(t)}\Rightarrow\ h'(t)=-\frac{300}{x^2(t)}\cdot x'(t)$$

$$h'(t)=-\frac{300}{30^2}\cdot 5=-\frac{5}{3}\ pié/seg\ .$$

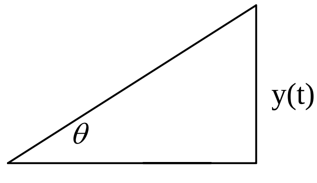
6.- Una cubeta inicialmente con 10 galones de agua, gotea ; el volumen en el tiempo t está dado por: $V(t)=10(1-\frac{t}{100})^2$.¿Con qué velocidad disminuye el volumen luego de 1 minuto?

Solución:

$$V'(t)=20(1-\frac{t}{100})(-\frac{1}{100})\ \Rightarrow\ V'(1)=20(\frac{99}{100})(-\frac{1}{100})=-0{,}198\,gal/seg$$

7.- Un globo meteorológico se eleva en forma vertical y es observado desde un puesto a 300 mts. del punto de elevación .¿Con qué velocidad se está elevando cuando el ángulo del observador es de 45º y aumenta un grado por segundo?

Solución:



$$tg(\theta(t))=\frac{y(t)}{300}\ .\ \text{derivando}\Rightarrow Sec^2\theta(t)\cdot\theta'(t)=\frac{y'(t)}{300}$$

$$\theta'(t)=1\quad \theta\ (t)=45$$

$$\therefore(\sqrt{2})^2\cdot 1=\frac{1}{300}y'(t)\Rightarrow y'(t)=600\,mts./seg$$

2.10.2.-Monotonías de una función.-

Recordemos las definiciones de monotonía:

a) f(x) creciente en $I \subset R \Leftrightarrow \forall\ x > y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
b) f(x) decreciente en $I \subset R \Leftrightarrow \forall\ x > y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

Teorema.

Si f \`(x) >0 en una vecindad de x, entonces la función es creciente allí.

Demostración.

Se tiene que: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) > 0 \therefore \exists\ I = (x_0-\partial, x_0+\partial) \ni (x_0+h) \in I$

y si h>0 $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} > 0$ luego $f(x_0+h) > f(x_0)\quad \forall h > 0 \quad y\ (x_0+h) \in I$

o sea la función es creciente.

Observación.

1.- De modo análogo, si f ‘(x)<0 ,la función es decreciente, en la vecindad en que ello ocurra

2.- Recuérdese que si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l > 0,$ existe un intervalo donde la función cuando es continua mantiene ese signo.

3.- La condición es suficiente pero no necesaria, en el sentido que no se cumple el recíproco, como es el caso de $f(x) = x^3$, la función es creciente en una vecindad del cero sin embargo $f'(0) = 0$.

4.- Se tiene además el caso de $f(x) = \sqrt[3]{x}$, que es creciente sin embargo no existe la derivada en 0.

Ejemplos.

1.- Determinar el intervalo de crecimiento de la función : $f(x) = \dfrac{1+x}{1+x^2}$.

Solución:

$$f'(x) = \frac{(1+x^2)-2x(1+x)}{(1+x^2)^2} = \frac{-x^2-2x+1}{(1+x^2)^2} \therefore\ f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2+2x-1 < 0$$

Recordando que la figura es una parábola que abre hacia arriba, la parte negativa se encuentra entre las dos raíces, si es que existen.

$x^2+2x-1=0 \Rightarrow x=\dfrac{-2\pm\sqrt{8}}{2}=(-1\pm\sqrt{2})$ .Luego la función crece en $(-1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2})$ y por lo tanto decrece en el complemento de su dominio.

2.- Estudiar las monotonías de la función: $f(x)=3\sqrt[3]{x}-5\sqrt[5]{x}$.

Solución.

$f'(x)=x^{-\frac{2}{3}}-x^{-\frac{4}{5}}= x^{-\frac{2}{3}}(1-\dfrac{1}{x^{\frac{2}{15}}})$ como $x^{-\frac{2}{3}}>0 \Rightarrow f'(x)>0 \Leftrightarrow x^{\frac{2}{15}}>1 \therefore |x|>1 \;\; y \;\; x\neq 0$.

Luego la función crece en $(-\infty,-1)\cup(1.\infty)$ y decrece si $x\neq 0 \;\; y \;\; x\in(-1,1)$ y el cambio de monotonía ocurre en x =1 y x = -1.

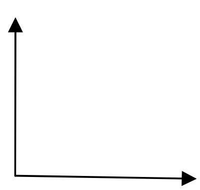
3.- Sea $f(x)=(x^3-3x^2)^{\frac{1}{3}}$, Encuentre los intervalos de decrecimiento.

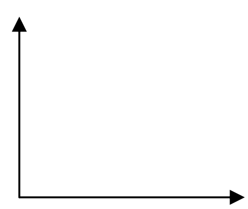
Solución.

$f'(x)=\dfrac{x(x-2)}{(x^3-3x^2)^{2/3}}<0 \Rightarrow x<2 \;\; y \;\; x>0$, luego decrece si $x\in(0,2)$.

2.10.3.- Concavidades.

Diremos de un modo informal que una gráfica presenta **una concavidad hacia arriba** cuando ,la tangente en todo punto queda más abajo que la curva, y habrá **concavidad hacia abajo** cuando la tangente está sobre la curva.



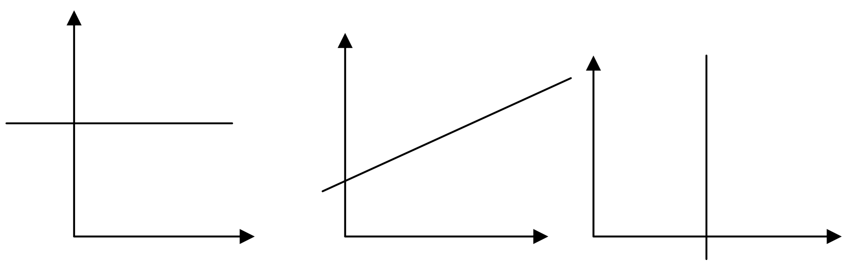


De un modo igualmente informal podemos decir que:

a) **Si** f'' **(x)>0 en (a,b)** ,entonces $f'(x)$ es creciente en el sentido que la recta tangente tiene pendiente en crecimiento cuando se avanza desde a hasta b o que la recta tangente va girando en sentido anti-reloj es decir el gráfico está bajo la tangente y por lo tanto hay concavidad hacia arriba.

b) Si $f''(x) < 0$ **en (a,b)**, entonces $f'(x)$ es decreciente es decir que la recta tangente lleva una pendiente en disminución desde a a b y las rectas van girando en sentido del reloj lo que implica que la curva está bajo las tangentes es decir hay concavidad hacia abajo.

c) Si $f''(x)$ cambia de signo en un punto, allí se produce un **punto de inflexión** o sea cuando $f''(x) = 0$,luego es punto de inflexión donde hay cambio de concavidad.



Ejemplos.

1.- Determinar las concavidades y encontrar el punto de inflexión en el gráfico de $f(x) = x^3$

Solución.

$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f''(x) = 6x \therefore f''(0) = 0$. Como $f''(x) > 0 \quad \forall x > 0$ hay concavidad hacia arriba en $(0, \infty)$. Como $f''(x) < 0 \ \forall x < 0$, luego hay concavidad hacia abajo y el punto 0 es punto de inflexión, por lo demás el gráfico es bastante familiar para confirmar lo dicho.

2.- Determinar las concavidades de $f(x) = 2 - \frac{x}{6} - \frac{x^3}{6}$.

Solución.

$f'(x) = -\frac{1}{6} - \frac{3x^2 - 6}{6} = -\frac{1}{6}(1 + \frac{x^2}{2}) \quad f''(x) = -\frac{x}{6} > 0 \quad Si \quad x < 0 \quad \Rightarrow$ Concavidad hacia arriba

$f''(x) < 0 \;\; Si \;\; x > 0 \Rightarrow$ Concavidad hacia abajo, luego x = 0 es un punto de inflexión de la curva.

3.-Determinar concavidades en las curvas:

a) $f(x) = 6x^2 - x^3 + x - 1.$ $\quad b) f(x) = x^4 - 12x^2 + x - 1 \quad c) f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$

Solución:

a) $f'(x) = 12x - 3x^2 \Rightarrow f''(x) = 12 - 6x > 0 \Rightarrow x < 2$ luego hay concavidad hacia arriba en $(2, \infty)$

$b) f'(x) = 4x^3 - 24x + 1 \Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 24 > 0 \;\; si \;\; x^2 > 2 \Leftrightarrow x > 2 \vee c < -2$ luego la concavidad hacia abajo se produce en el intervalo (-2,2)

c) $f'(x) = -2x(x^2 + 3)^{-2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2x^2 - 6}{(x^2 + x)^3} > 0 \Rightarrow x^2 > 3 \;\text{ó}\; x > \sqrt{3} \;\text{ó}\; x < -\sqrt{3}$

la concavidad hacia abajo se produce en $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

2.10.4.- Asíntotas para una curva.

Recordemos que las **Rectas Asintóticas** o simplemente **Asíntotas de una curva,** es toda recta que tiende a encontrarse con la curva sin que logren punto en común, es decir si f(x) es la curva y l(x) la asíntota debe darse que: $\lim_{x \to a} \left| f(x) - l(x) \right| = 0$ donde a puede ser infinito.

1) $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = k \Rightarrow y = k$, es una **Asíntota horizontal**

2) $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \Rightarrow$ x = a **es una Asíntota Vertical.**

3) $y = mx + n;$ es una **Asíntota oblicua** cuando: $m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx)$

Fig.

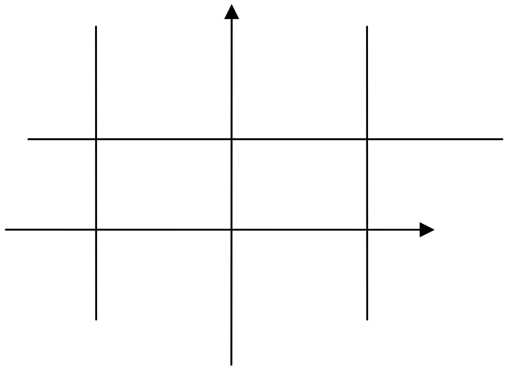
Ejemplos.

1.- Analizar asíntotas para la curva: $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-a^2}$.

Solución.

a) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{x^2}{x^2-a^2}=\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{x^2}{x^2-a^2}=\infty$ luego tenemos asíntotas verticales $x=\pm a$ considerando que f(x) es una función par por lo tanto simétrica respecto al eje y

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{1-\dfrac{a^2}{x^2}}=1$, por lo tanto y = 1 es Asíntota horizontal.



2) Pruebe que la curva: $y=(x^3-3x^2)^{1/3}$ Admite una asíntota oblicua.

Solución.

Sea $y=mx+n$ con $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^3-3x^2)^{1/3}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{3}{x})^{1/3}=1$

$n=\lim\limits_{x\to\infty}((x^3-3x^2)^{1/3}-(x^3)^{1/3})=-1$, luego la asíntota será $y=x-1$

Observación:

Se sabe que $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$**,** luego hacemos:

$a=(x^3-3x^2)^{1/3}$ $\quad b=(x^3)^{1/3}$ Así

$$\lim_{x\to\infty}(a-b)=\lim_{x\to\infty}\frac{a^3-\acute{}b^3}{a^2+ab+b^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2}{x^{4/3}(x-3)^{2/3}+x^{5/3}(x-3)^{1/3}+x^2}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-3}{(1-\frac{3}{x})^{2/3}+(1-\frac{3}{x})^{1/3}+1}=-1.$$

Observación.

Con los elementos anteriores se puede abordar el problema del trazado de una curva, que puede tomarse como un necesario ejercicio aunque la calculadora puede hacerlo también; las dos acciones son útiles. Para lograrlo ha de considerarse por lo menos:

a) Dominio de la función
b) Intersección con los ejes
c) Monotonías.

d) Concavidades, puntos de inflexión
e) Asíntotas

2.10.5.-Trazado de una curva:

1.- Analizar la curva : $y = 12 + 2x^2 - x^4$ .y lograr su gráfico aproximado.

Solución:

- La función es par, por lo que su gráfico es simétrico respecto del eje oy
- Dominio de ella es todo R
- Intersección con ejes:

  $x = 0 \Rightarrow y = 12 \quad y = 0 \Rightarrow (x^2)^2 - 2(x^2) - 12 = 0 \Rightarrow x^2 = (1+\sqrt{3}) \therefore x_1 = (1+\sqrt{3})^{1/2} \approx 2{,}1$
- Monotonías:

  $f'(x) = 4x(1-x^2) \therefore f'(x) > 0 \Rightarrow x > 0 \wedge x^2 < 1 \Rightarrow x \in (0,1)\ ó x < 0 \wedge x^2 > 1 \Rightarrow x \in (-\infty,-1)$

Luego es creciente en la unión de estos intervalos, y decreciente en el complemento.

- Concavidades: $f''(x) = 4(1-3x^2) > 0 \ si \ x \in (\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$,hay concavidad hacia arriba.

La concavidad hacia abajo se produce en el complemento del dominio y los puntos de inflexión son $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

Fig.

2) Analizar la curva $f(x) = (\frac{x-1}{x-2})^{1/3}$ y graficar

Solución:

$f'(x) = \frac{-1}{3(x-1)^{2/3}(x-2)^{4/3}} < 0 \quad \forall x \in R - \{1;2\}$**.**luego es siempre decreciente.En x = 1 se observa que la tangente tiene la pendiente infinita.

Como : $f''(x)=\dfrac{2/9}{(x-1)^{2/3}(x-2)^{4/3}}\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}\right)$ el signo lo define el factor:
$\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}\Leftrightarrow\dfrac{3x-4}{(x-1)(x-2)}$, mediante el análisis de estor tres factores ,la desigualdad arroja: $f''(x)>0\Rightarrow x\in(1,\frac{4}{3})\cup(2,\infty)$, luego concavidad hacia arriba, por lo tanto como: $f''(x)<0\Rightarrow x\in(-\infty,1)\cup(4/3;2)$ la concavidad es hacia abajo así el punto de inflexión se produce en $x=4/3$ y $x=1$.

Siendo: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\infty$, en x = 2 se tiene una asíntota vertical .Por otra parte al tener que : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1$, entonces y = 1 es asíntota horizontal.

Fig.

2.11.-Teoremas del valor medio.-

Teorema: (Rolle)

Sea f(x) definida en $[a,b]$

a) Continua en $[a,b]$
b) Diferenciable en (a,b)
c) f(a) = f(b). Entonces existe al menos un $x_0\in(a,b)$ donde $f'(x_0)=0$.

Demostración. (Se omite)

La continuidad en el intervalo cerrado: $[a,b]$ con f(a) = f(b) permite visualizar en un gráfico que la tangente es horizontal en por lo menos un punto luego $f'(x_0)=0$.
De un modo sencillo: Si la función parte de f(a) y no es constante y si es creciente ,luego deberá ser decreciente esto sucederá al menos una vez y recíprocamente ,es decir la derivada pasará de positiva a negativa o recíprocamente , luego será nula al menos una vez

Observación

Dadas las condiciones anteriores, la curva $y = f'(x)$ corta al menos una vez en (a,b) al eje x. pues tiene cambio de signo De esta manera la ecuación : $f'(x) = 0$ tiene al menos una raíz en (a,b).

Teorema: (Valor medio)

Sea f(x) definida en $[a,b]$,tal que a) f(x) continua en $[a,b]$ b) Diferenciable en (a,b) Entonces existe $x_0 \in (a,b)$, tal que :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$$

Demostración:

Asumiendo que $f(b) \neq f(a)$ (De lo contrario se reduce a Rolle) y definiendo la nueva función $F(x) = f(x) - (\frac{f(b)-f(a)}{b-a})x \Rightarrow F(b) = bf(a) - af(b)$ y

$F(a) = bf(a) - af(b) \Rightarrow \exists x_0$ del teorema de Rolle donde

$$F'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) = 0 \therefore \quad f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Ejemplos.

1.- Si $f(x) = \sqrt{x^2+9}$. Encontrar todos los puntos $x_0 \in (0,4)$,del Teorema del Valor Medio.

Solución.

$$f'(x_0) = \frac{f(4)-f(0)}{4-0} = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \qquad f'(x_0) = \frac{1}{2}\left(x_0^{\,2}+9\right)^{-1/2} 2x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_0 = \pm\sqrt{3}$$

2.- Probar que si una función es continua en $[a,b]$ y $f`(x) = 0;\ \forall x \in [a,b]$ Entonces $f(x) = k\ (Cte)$.

Solución.

Como $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(x_0) = 0\ x_0 \in (x,y)\ \forall (x,y) \in [a,b] \Rightarrow f(x) = f(y)\ \forall\ x,y$,luego es una función constante.

Con esto se puede sostener que “la condición necesaria y suficiente para que f(x) sea constante es que su derivada sea nula”

3.- Aplicando el Teorema del Valor Medio , probar la desigualdad:

$$\sqrt{1+x} < 1+\frac{x}{2}\ ;\ x>0$$

Solución.

Si tomamos como $f(x)=\sqrt{x}$ y escribiendo el Teorema como:

$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h) \qquad 0\le\theta\le 1 \qquad con\ a=1\ \ h=x$,se tendrá:

$$\sqrt{1+x}-\sqrt{1}=x\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+\theta x}} \Leftrightarrow \sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2\sqrt{1+\theta x}} \quad Si\ \ x>0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+\theta x}} > \frac{1}{\sqrt{1+x}} \therefore$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+x} > 1+\frac{x}{2\sqrt{1+x}} \Leftrightarrow 1+x > \sqrt{1+x}+\frac{x}{2}\ \text{ o bién :} 1+\frac{x}{2} > \sqrt{1+x}$$

4.-Probar la desigualdad: $\frac{x}{1+x} < L_n(1+x) < x$

Solución.

Si $f(x)=L_n x,$ continua y diferenciable en R.- $f'(x)=\frac{1}{x} \qquad b=1+x \qquad a=1$

5.- Un automóvil ,pasa un control a 90km/h ,12 km. más adelanta 2 horas más tarde , pasa otro control a la velocidad 100km/h.,use el teorema del valor medio para demostrar que en algún momento su velocidad fue de 6km/h.

Solución.

La velocidad media está dada por $v_m = \frac{s(2)-s(0)}{2-0}=\frac{12-0}{2}=6km./h$,como la función $s(t)$, es continua y derivable en $(0,2)$ existe t donde $s'(t)=6$

2.12.- Máximos y Mínimos.

Definición:

Sea f(x) un función definida en un intervalo I en R , $x_0 ; x_1$ un puntos en I..Se dice que la función alcanza un valor máximo en x_0, si y solo sí:

$$\boxed{\forall x\in I \Rightarrow f(x_0)\ge f(x)}$$

Y se dice que ella alcanza su valor mínimo en x_1, sí y solo sí:

$$\boxed{\forall x\in I \Rightarrow f(x_1)\le f(x)}.$$

Si tal situación se cumple en todo el dominio de la función se habla de un punto **extremo absoluto** de lo contrario se trata de un punto **extremo local.**

Observación.

1.- Según la interpretación geométrica de la derivada, en un punto extremo, la recta tangente será horizontal.
2.- También pueden darse puntos extremos donde no exista derivada a todos se les llama **puntos críticos.**

3.- Donde la tangente es horizontal no necesariamente se da un punto de máximo o de mínimo.

Teorema.

Para un función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces f(x) alcanza al menos una vez un valor máximo y un valor mínimo allí

Demostración.

Argumentando en forma intuitiva y con ayuda de un gráfico se ve evidente pues la continuidad significa un trazado de curva sin interrupciones.

Teorema.(Condición necesaria)

Para una función continua y derivable en un intervalo I con $x_0 \in I$ .Si x_0 es un punto de máximo ó mínimo local: Entonces: $f'(x_0) = 0$.

Demostración.

Si x_0 es un punto de mínimo entonces
$\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \;\; si \;\; h > 0 \wedge \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \;\; si \;\; h < 0$ y como existe

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, Entonces necesariamente debe ser cero.

Análogo razonamiento si el punto es de máximo.

Observación.

1.-La aplicabilidad del teorema es en el sentido que allí donde la derivada no se anule no puede haber punto de máximo ni de mínimo, por lo que la búsqueda de éstos debe hacerse entre todos aquellos que hagan cero a la derivada. Además por ser condición solo necesaria, debemos saber que si la derivada es nula en un punto allí no necesariamente es de máximo o de mínimo, recuérdese el punto en que hay cambio de concavidad, allí se tiene un **punto de inflexión**.

2.- Aplicado lo anterior, la identificación de máximo o de mínimo puede hacerse según la naturaleza del caso, como lo muestran los ejemplos.

3.- En estas mismas circunstancias, y en forma intuitiva podemos determinar el siguiente criterio:

$a)\, Si\ f'(x) < 0\ \ para\ \ x < x_0\ \ y\ \ f'(x) > 0\ \ para\ \ x > x_0 \Rightarrow x_0$ Es punto de mínimo pues la función cambia de decreciente a creciente.

$b)\, Si\ f'(x) > 0\ \ para\ \ x < x_0\ \ y\ \ f'(x) > 0\ \ para\, x > x_0 \Rightarrow x_0$ Es punto de máximo por el cambio de las monotonías,

Ejemplos.

1.- Analizar la función: a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$ b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$

c) $f(x) = x + \dfrac{9}{x}$ d) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$

Solución.

a) $f'(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$, único punto crítico, como:
$f'(x) < 0\ si\ x < 2\ y\ f'(x) > 0\ si\ x > 2 \Rightarrow x = 2$ es de mínimo por el cambio de la monotonía.(También se deduce viendo que se trata de una parábola con vértice en el punto x = 2)

b) $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow 3(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1\ \ punto\ \ crítico$,como la derivada es siempre positiva no hay cambio en la monotonía, , pero la tangente es horizontal; la segunda derivada nos confirma que se trata de un punto de inflexión.

c) $f'(x) = 1 - \dfrac{9}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 3$ anula la derivada, el cambio de monotonía va desde decreciente a creciente en ambos puntos luego son de mínimo.

d) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 0 \Leftrightarrow 6(x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 3\ y\ x = -2$ puntos críticos , los cambios de signo de la derivada se produce en ellos en x = -2 el cambio es de positivo a negativo luego punto de máximo mientras que en x = 3 el cambio es de negativo a positivo por lo tanto es punto de mínimo local como lo vemos en una figura.

2.- Problemas aplicados:

1) Se desea cerrar un corral rectangular con capacidad de 200 metros cuadrados contando para ello con una muralla como para que se pueda cerrar solo 3 lados,¿Cuál es la cantidad mínima de malla para alcanzar el cercado?.

Solución.

Según el gráfico ,la longitud será : $L = 2x + y$,pero lleva la condición : $xy = 200$, al incorporarla la función para el estudio queda:

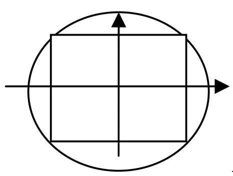
$$L(x) = 2x + \frac{200}{x}$$

$L'(x) = 2 - \frac{200}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 10 \therefore y = 20$, y la mínima cantidad de malla será: 40 mts.(¿Porqué es mínima y no máxima?, pues porque sería máxima si uno de los lados fuera infinitamente pequeño para que así el otro debería ser muy grande para alcanzar el área requerida)

2) Hallar las dimensiones del rectángulo de mayor área que pueda inscribirse en un círculo de radio R.

Solución.

$A = 2x \cdot 2y$ y la condición: $x^2 + y^2 = R^2$,La función deberá ser:



A(x) =4x$\sqrt{R^2 - x^2} \Rightarrow A'(x) = 4\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{4x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 0 \therefore$

Luego $x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$,la razón para sostener que este valor entrega un área máxima ,está en que sería mínima cuando uno de los lados fuera infinitamente pequeño.

3) Se dispone de 100mts. de alambre para que dividido en dos partes formar un circulo y un cuadrado,¿cómo debe cortarse para que la suma de las áreas sea máxima?

Solución

Sean x el lado del cuadrado y r el radio del círculo,.luego se estudiará la función suma : $A = x^2 + \pi r^2$, con la condición que $4x + 2\pi r = 100$,donde $r = \frac{100 - 4x}{2\pi}$,así la función para el estudio queda: $A(x) = x^2 + \frac{1}{4\pi}(100 - 4x)^2 \Rightarrow A'(x) = 2x + \frac{1}{2\pi}(100 - 4x)(-4) = 0$

$2x = \frac{2}{\pi}(100 - 4x) \Rightarrow x(2 + \frac{8}{\pi}) = \frac{200}{\pi} \therefore x = \frac{100}{\pi + 4} \quad r = 100\frac{\pi + 3}{2\pi(\pi + 4)}$ ..

Teorema.(Criterio de la 2ª derivada).

Sea f(x) función con derivada en una vecindad de x = x_0 Si.

$a)\ f'(x_0)=0 \quad y \qquad f''(x_0)>0 \Rightarrow x_0$ *punto de m´nimo*
$b)\ f'(x_0)=0 \quad y \qquad f''(x_0)<0 \Rightarrow x_0$ *punto de máximo.*

Demostración.

$f''(x_0)>0 \Rightarrow f'(x)$ *creciente* en torno del punto, luego

si: $$\begin{array}{l} x<x_0 \Rightarrow f'(x)<f'(x_0)=0 \therefore f(x) \text{ decreciente. en } (x,x_0) \\ x>x_0 \Rightarrow f'(x)>f'(x_0)=0 \therefore f(x) \text{ creciente en } (x_0,x) \Rightarrow x_0 \text{ punto de mínimo local} \end{array}$$

De modo análogo se prueba la otra parte.

Ejemplos.

1.- Encontrar máximos y mínimos de la función.

$$f(x)=x^3+3x^2-3x+4\,.$$

Solución.

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2+6x-3=0 \Rightarrow x=-1\pm\sqrt{2}$$

a) Puntos críticos: $f''(x)=6x+6 \therefore f''(-1+\sqrt{2})>0,$ *punto de mínimo*

$f''(-1-\sqrt{2})<0,$ *punto de máximo.*

2.- Determinar los puntos extremos de la función: $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

Solución:

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

$f''(x)=\dfrac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$, $f''(1)<0$,punto de máximo y $f''(-1)>0$,punto de mínimo.

Agregamos el siguiente razonamiento
El signo de la segunda derivada depende del numerador; $x\geq 0 \wedge x\geq\sqrt{3} \Rightarrow x\geq\sqrt{3}$ hay concavidad hacia arriba al igual que si $-\sqrt{3}\leq x\leq 0$; $x\leq 0 \wedge x\leq -\sqrt{3} \Rightarrow x\leq -\sqrt{3}$, hay concavidad hacia abajo al igual que si $x\in(0,\sqrt{3})$.

3.- Hallar máximo y mínimo de la función : $f(x)=Sen\,x+Cos\,x$.

Solución:

$f'(x) = Cosx - Sen\,x = 0 \Rightarrow x = \pi/4 \;\; y \;\; x = 5\pi/4$

$f''(x) = -Sen\,x - Cos\,x, \quad f''(\pi/4) = -\sqrt{2} < 0 \Rightarrow \; punto\;\; de\;\; máximo$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad f''(5\pi/4) = \sqrt{2} > 0 \Rightarrow \; punto\;\; de\;\; mínimo$

4.- Hallar punto de inflexión de: $f(x) = \dfrac{ax}{x^2 + b^2} \quad a, b > 0$

Solución:

$f'(x) = \dfrac{ab^2 - ax^2}{(x^2 + b^2)^2} \Rightarrow f''(x) = \dfrac{2ax^3 - 6ab^2x}{(x^2 + b^2)^3} = 0 \Rightarrow x = \pm b\sqrt{3}$ y x = 0,son los puntos de inflexión. Además se puede agregar que los puntos críticos salidos de $ab^2 - ax^2 = 0$ son $x = \pm b$

Por lo que $f''(b) < 0$ es punto de máximo y $f''(-b) > 0$ da punto de mínimo,luego allí hay concavidad hacia arriba,y en torno de x= b hay concavidad hacia abajo.

5.- Expresar el número 18 como la suma de dos positivos de modo que del primero por el cuadrado del segundo sea máximo.

Solución.

Sean x e y los números con x + y =18.la función por analizar será: $f(x) = x{\cdot}y^2$
Pero y = 18 – x, luego la función
es: $f(x) = x{\cdot}(18 - x)^2 \Rightarrow f'(x) = (18 - x)(18 - 3x) = 0 \Rightarrow x = 6$,el otro valor se descarta, de modo que el producto da 72,¿máximo?.Si x<6 la función es creciente en 6 cambia a decreciente .

6.- Hallar el rectángulo de mayor área cuya base está en el eje ox y los vértices superiores están en la parábola $y = 27 - x^{2.}$.

Solución:

Si x es la abscisa de un vértice la ordenada deberá ser: $27 - x^2$,por estar en la parábola y por la simetrá de la figura el área debe ser
: $A(x) = 2x(27 - x^2) \Rightarrow A'(x) = 54 - \dfrac{x^4}{2} = 0 \Rightarrow x^4 = 108 \;\; x \approx 3.2 \;\; y \approx 16.76 \;\; y \;\; A \approx 108$ -

7.-Al mediodía un barco A está a 50 millas al norte de otro B.A avanza al sur a 16m/hora y B lo hace al oeste a 12m/hora, ¿A qué hora están a la distancia mínima y cuál es esa distancia?

Solución.

En un sistema de ejes rectangulares B se ubica en el orígen mientras que A se ubica el el eje vertical y su posición en el tiempo t será (50-16t) ,mientras que B se aleja del orígen a una distancia de 12t. La distancia o su cuadrado por el teorema de Pitágoras nos entrega la función: $d^2 = (50-16t)^2 + 144t^2 = f(t) \Rightarrow f'(t) = 800t - 1600 = 0 \Rightarrow t = 2hrs.$ y la distancia al hacer el reemplazo da 30 millas.

2.13.-.Regla de L`Hospital.

Esta aplicación de la derivada está destinada a resolver problemas de límites, de funciones cuándo éstas presentan las dificultades llamadas indeterminaciones.

A) Indeterminación $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$.-

Teorema.

Dadas las funciones f(x) y g(x) definidas y continua en $I = [a-h, a+h]$, derivable en (a-h ,a+h)

a) $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$

b) $f(x) \to 0 \;\; y \;\; g(x) \to 0 \;\; si \;\; x \to a \; o \; bién \;\; f(a) = 0, g(a) = 0$

ó bien $f(x) \to \infty \;\; y \;\; g(x) \to \infty \;\; si \;\; x \to a$

Entonces:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l \; .$$

Demostración.

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Teorema.

Si $f(x) y\, g(x)$ funciones continuas y derivables $\forall x > K$ con:

a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ ò ∞

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$ Entonces: $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

Demostración:

Haciendo el cambio de x *por* $\frac{1}{t}$ podemos repetir las argumentación anterior.

Observación:

Esta es una demostración un tanto débil, que no cubre todas las situaciones sino que se da a modo de ejemplo.

Ejemplos.

1.- Calcular los límites en un punto finito ó infinito

a) $\lim_{x\to 0} \frac{Senx}{x}$ b) $\lim_{x\to\infty} \frac{L_n x}{\sqrt[3]{x}}$ c) $\lim_{x\to 0} \frac{Senx}{1 - Cosx}$ d) $\lim_{x\to\pi} (x-\pi) Cotg\, x$

Solución.

a) $\lim_{x\to 0} \frac{Sen\, x}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{Cos\, x}{1} = 1$ b) $\lim_{x\to\infty} \frac{L_n x}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1/3\, x^{-2/3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x^{1/3}} = 0$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{Sen\, x}{1 - Cos\, x} = \lim_{x\to 0} \frac{Cos\, x}{Sen\, x}$, el límite es infinito, más bien, no existe.

d) $\lim_{x\to\pi} \frac{(x-\pi) Cos\, x}{Sen\, x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to\pi} \frac{Cos\, x + \pi Sen\, x}{Cos\;\; x} = 1$

B) Indeterminación $((\infty - \infty);\ 1^{\infty}\ ;\ 0^{\infty};\quad 0^{0}\quad \infty^{0}\quad 0\cdot\infty)$

En estos casos las situaciones se llevan a la forma anterior, lo que se verá mediante los ejemplos.

Ejemplos.

1.- Resolver:

a) $\lim_{x\to\pi/2}(Sec\,x - Tg\,x)$ b) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ c) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$ d) $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$

e) $\lim_{x\to 0} xL_n x$.

Solución.

a) $\lim_{x\to\pi/2}(Sec\,x - tg\,x) = \lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{1-Sen\,x}{Cos\,x}\right) = \frac{0}{0} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{-Cos\,x}{-Sen\,x} = 0$

b) Como f(x) $= e^{L_n f(x)} \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} e^{L_n f(x)} = e^{\lim_{x\to a} L_n f(x)}$ luego como

$\lim_{x\to 0} L_n (1+x)^{1/x} = \lim_{x\to 0}\frac{L_n(1+x)}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x} = 1$ y $e^1 = e \Rightarrow \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$

c) Al igual que en b) calculamos límite de $: e^{Lnf(x)}$

$$\lim_{x\to\infty} xL_n(1+\frac{1}{x}) = \lim_{x\to\infty}\frac{L_n(1+\frac{1}{x})}{1/x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-1/x^2}{(1+\frac{1}{x})}}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{x})} = 1$$

$\therefore \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

d) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}L_n x = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$ como $e^0 = 1 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$

e) $\lim_{x\to 0} xL_n x = \lim_{x\to 0}\frac{L_n x}{1/x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$.

2.14.- Guía de Ejercicios

1.- Demuestre que la razón de cambio del área de un cuadrado con respecto a la longitud de su lado es la mitad de su perímetro y que la razón de cambio del volumen de un cubo respecto a la longitud de su arista es la mitad de su área superficial.

2.- Un estanque contiene 5000 litros de agua , la cual se escurre por el fondo en 40 minutos, entonces la ley de Torricelli da el volumen V de agua que queda en el estanque después de t minutos como:

$$V = 5000(1-\frac{t}{40})^2 \qquad 0 \le t \le 40.$$

Encuentre la razón de escurrimiento luego de a) 5min b)20 min.

3.- La arena al vaciarse a razón de 10pié/seg. forma un cono cuya altura es el doble del radio basal.¿a qué razón aumenta el radio de la base cuando su altura es de 5 pié?.

4.-¿En qué razón aumenta el área de un triángulo equilátero si su base mide 10 cm. Y aumenta a 5cm/seg.?

5.- Dos carreteras rectas se cruzan perpendicularmente.Un auto pasa a las 10 a.m..por el cruce hacia el este a 30 km./h .A las 11 pasa por la intersección otro con rumbo al norte a 40km/h. ¿A que razón cambia la distancia entre ellos a las 13 hrs.

6.-.Determine los intervalos de crecimiento de la función: $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x-1}$.

7.- Señale las concavidades de la función, anterior y determine los punto de máximo y el de mínimo..Pruebe que tiene una asíntota oblicua.

8.- Determine las concavidades de las curvas:

$a)\ f(x) = x + \frac{9}{x}$ $\qquad b)\ f(x) = x^{8/3} - 20x^{2/3}$ $\qquad c)\ f(x) = x^{1/3} + 2x$ $\qquad d)\ f(x) = x(x-4)^3$

9.- La función : $y = \frac{2+x-x^2}{(x-1)^2}$,tiene asíntotas vertical y horizontal,¡determínelas!.

10.-.Grafique la función $f(x) = x^3 - 27x$, señalando puntos de máximo y de mínimo estudiando los cambios de concavidades.

11.- Pruebe que la función $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ en $[-1,1]$,satisface el teorema de Rolle, encontrando los puntos .

12.- Pruebe que la función $f(x) = 3x^2 + 6x - 5$, en $[-2,1]$, cumple el teorema del valor medio ,señalando los puntos.

13.- Pruebe que la ecuación $x^5 - 2x + 3 = 0,$ tiene una raíz en $[0,1]$

14. Determine dos números cuya diferencia es 20 y su producto es mínimo.

15.-Una caja rectangular cerrada de $576\,cm^3$ de volumen, se construirá de modo que el fondo sea un rectángulo con longitud el doble del ancho, determinar las dimensiones que minimicen el área total de la superficie.

16.-.Un tanque cilíndrico de $1000\,cm^3$ con fondo plano y tapa semi esférica; encontrar las dimensiones que hagan mínimo el gasto de material

17.- Calcular los límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 - x + L_n x}{1 + Cos\pi x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 + Cos2x}{1 - Sen2x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{Senx})$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{Senx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}(1 + 2x)^{1/3x}$ g) $\lim\limits_{n\to \infty}\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \frac{x^3}{3!} - Senx}{x^5}$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - Sen^2 x}{x^4}$ j) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1 + x + x^2\right)^{\frac{1}{x}}$

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE. Prof. JORGE ALEJANDRO INOSTROZA LAGOS