



SEMANA 12 y 13: LÍMITE DE FUNCIONES

Usa este margen
para consultar
más rápido el
material. Haz
también tus
propias
anotaciones.
▼

9. Límite de Funciones

9.1. Introducción

Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{si } x > 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

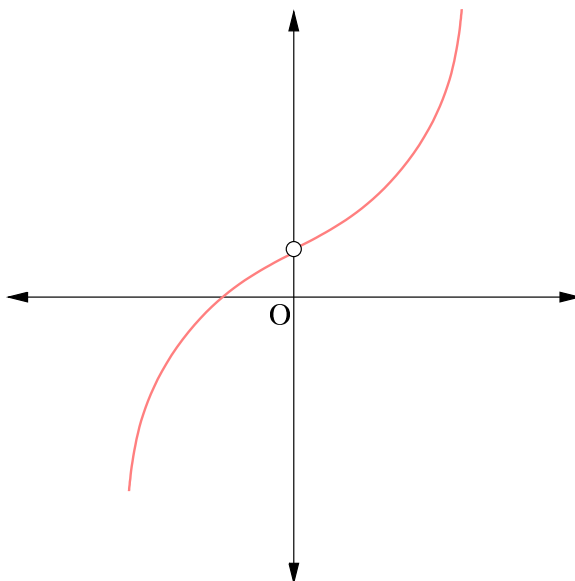


Figura 13: Ejemplo de función con límite $=1$ cuando $x \rightarrow 0$.

Podemos ver en la figura ??, que esta función no está definida en $\bar{x} = 0$. Sin embargo, se observa que cuando se consideran valores de x no nulos pero cercanos a cero, los valores de $f(x)$ se aproximan al real $\ell = 1$. Nos gustaría decir que cuando x tiende a $\bar{x} = 0$ los valores de $f(x)$ tienden a $\ell = 1$.

Para formalizar el concepto de “tender a $\bar{x}$ ” o de “aproximarse a $\bar{x}$ ” haremos uso de sucesiones (x_n) convergentes a dicho real. Sin embargo, como en general el real $\bar{x}$ no necesariamente pertenecerá al dominio de la función considerada (notar que justamente, en este ejemplo, $\bar{x} = 0$ no pertenece al dominio de f , que es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$), no siempre es posible encontrar aquellas sucesiones que converjan a $\bar{x}$ cuyos valores x_n estén en el dominio de la función.

Para poder asegurar que estas sucesiones existen, introduciremos primeramente la noción de Punto de Acumulación de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$.

DEFINICIÓN (PUNTO DE ACUMULACIÓN) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto cualquiera de $\mathbb{R}$. El real $\bar{x} \in \mathbb{R}$ se llama punto de acumulación de A si existe alguna sucesión $(x_n) \subseteq A$ (con valores en A) tal que $x_n \neq \bar{x}$, $\forall n \geq n_0$ algún $n_0 \in \mathbb{N}$ y $x_n \rightarrow \bar{x}$.

El conjunto de los puntos de acumulación de $A \subseteq \mathbb{R}$ se denota A' .

9.2. Definición del límite de funciones

DEFINICIÓN Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $\bar{x} \in A'$, es decir $\bar{x}$ es un punto de acumulación de A . Diremos que f tiende a $\ell \in \mathbb{R}$ cuando x tiende a $\bar{x}$ (lo cual se denotará $f(x) \rightarrow \ell$ cuando $x \rightarrow \bar{x}$), o bien que ℓ es el límite de $f(x)$ cuando $x \rightarrow \bar{x}$ (lo que se anota $\ell = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x)$) si para toda sucesión (x_n) con valores en A , convergente a $\bar{x}$ y tal que $x_n \neq \bar{x}$, se cumple que la sucesión de las imágenes $(f(x_n))$ es convergente a ℓ .

Observación:

1. Si $\bar{x} \notin A'$ entonces no existen sucesiones (x_n) convergentes a $\bar{x}$ con valores en A , luego no puede estudiarse el límite de la función cuando $x \rightarrow \bar{x}$. En consecuencia, en ese caso se dirá que tal límite no existe. Por ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x} = \varnothing$$

2. Si $\bar{x} \in A'$ entonces el concepto de límite de $f(x)$ cuando $x \rightarrow \bar{x}$ está bien definido, sin embargo, este límite puede o no existir.

Ejemplos:

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.
2. $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x}$ no existe, ya que $-1 \notin (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})'$.
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ no existe ya que por ejemplo, $x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ pero $\frac{1}{x_n} = n$ no converge.

9.3. Unicidad del límite

Teorema 9.1. Si una función f tiene límite cuando $x \rightarrow \bar{x}$ entonces dicho límite es único.

DEMOSTRACIÓN. Sean ℓ_1 y ℓ_2 límites de $f(x)$ cuando $x \rightarrow \bar{x}$. Sea entonces (x_n) alguna sucesión con valores en el dominio de la función f y convergente a $\bar{x}$. Entonces por definición de límite se tiene que la sucesión $(f(x_n))$ es convergente a ℓ_1 y a ℓ_2 simultáneamente. Por lo tanto, en virtud de la unicidad del límite de sucesiones se tiene que $\ell_1 = \ell_2$. $\square$

9.4. Teoremas derivados de la definición en base a sucesiones

Cómo la definición de límite de funciones se apoya en la de límite de sucesiones, se pueden probar en forma sencilla los resultados de álgebra de límites que se enuncian a continuación.

Teorema 9.2 (Álgebra de límites). Sean f y g dos funciones y $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tales que $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = \ell_1$ y $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} g(x) = \ell_2$. Entonces:

1. si $\bar{x} \in (\text{Dom}(f))' \cap (\text{Dom}(g))'$ se tiene que:

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} (f + g)(x) = \ell_1 + \ell_2$$

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} (f - g)(x) = \ell_1 - \ell_2$$

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} (fg)(x) = \ell_1 \ell_2$$

2. si $\bar{x} \in (\text{Dom}(f/g))'$ y $\ell_2 \neq 0$ entonces:

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} (f/g)(x) = \ell_1 / \ell_2$$

3. En particular (cuando g es constante) se tiene que $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} (\alpha f)(x) = \alpha \ell_1$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Observación: Consecuencias directas del teorema anterior son que si $x \rightarrow \bar{x}$ entonces:

$$\begin{aligned} x^2 &\rightarrow \bar{x}^2, \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad x^k &\rightarrow \bar{x}^k, \\ a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 &\rightarrow a_n \bar{x}^n + \cdots + a_1 \bar{x} + a_0 \end{aligned}$$

y que si $b_m \bar{x}^m + \cdots + b_1 \bar{x} + b_0 \neq 0$ entonces

$$\frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0} \rightarrow \frac{a_n \bar{x}^n + \cdots + a_1 \bar{x} + a_0}{b_m \bar{x}^m + \cdots + b_1 \bar{x} + b_0}.$$

9.5. Teorema del Sandwich

Teorema 9.3 (Sandwich de funciones). Sean f , g y h tres funciones y sea $\bar{x} \in (\text{Dom}(g))'$.

Si $\exists \delta > 0$ tal que:

$$\forall x \in \text{Dom}(g) \cap [\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta] \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

y además $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} h(x) = \ell$ entonces $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} g(x) = \ell$.

Ejemplo 9.1 (Aplicación del teorema del Sandwich).

Usaremos el teorema del Sandwich de funciones para calcular el siguiente límite emblemático:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x}$$

Solución

El dominio de $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$ es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, luego claramente 0 es punto de acumulación de $\text{Dom}(f)$.

La desigualdad que usaremos del capítulo de trigonometría es la siguiente: se tiene que para $|x| < \frac{\pi}{2}$, se cumple:

$$\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \quad \text{sen } |x| \leq \sqrt{2 - 2 \cos |x|} \leq |x| \leq \tan |x|.$$

De aquí, dividiendo por $|x|$, despejando $\cos$ y usando las paridades de las funciones $\sin$ y $\cos$, se deduce que

$$\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\} \quad 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

Usando que las funciones 1 y $1 - \frac{x^2}{2}$ tienden a 1 cuando $x \rightarrow 0$, el teorema del Sandwich permite concluir que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

9.6. Teorema para la composición de funciones

Teorema 9.4 (Límite de la composición de funciones). Sean f y g dos funciones y $\bar{x} \in (\text{Dom}(g \circ f))'$. Si se cumple que $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = \ell$ y $\lim_{x \rightarrow \ell} g(x) = L$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} (g \circ f)(x) = L.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea (x_n) una sucesión cualquiera, con valores en $\text{Dom}(g \circ f)$ y convergente a $\bar{x}$.

Como el dominio de la función $g \circ f$ es:

$$\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \text{Dom } f : f(x) \in \text{Dom } g\},$$

se tiene que $x_n \in \text{Dom } f$ y $f(x_n) \in \text{Dom } g$. Es decir, las sucesiones (x_n) y $(y_n = f(x_n))$ tiene sus valores en $\text{Dom } f$ y $\text{Dom } g$ respectivamente.

Como $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = \ell$, $x_n \rightarrow \bar{x}$ y $(x_n) \subseteq \text{Dom } f$ resulta que $y_n = f(x_n) \rightarrow \ell$.

Además, como $\lim_{x \rightarrow \ell} g(x) = L$, $y_n \rightarrow \ell$ y $(y_n) \subseteq \text{Dom } g$, resulta que $(g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) = g(y_n) \rightarrow L$. Con esto queda terminada la demostración ya que se cumple la definición de

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} (g \circ f)(x) = L.$$

□

Observación: El teorema anterior se suele usar como un teorema de cambio de variables. Para visualizar mejor esto último, consideremos el siguiente proceso:

1° Escribimos

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} g(f(x))$$

2° Hacemos el cambio $u = f(x)$ y calculamos $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x)$.

3° Si sabemos que $u \rightarrow \bar{u}$ cuando $x \rightarrow \bar{x}$, intentamos establecer la igualdad:

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} g(f(x)) \quad " = " \quad \lim_{u \rightarrow \bar{u}} g(u)$$

4° Para concluir, hay que calcular el último límite.

Si logramos hacerlo y vale ℓ , entonces el cálculo habrá concluido y la igualdad que escribimos entre comillas será cierta en virtud del teorema del límite de la composición.

Notemos que si el último límite no existiera, la igualdad que escribimos entre comillas podría ser falsa, ya que en tal caso estaríamos fuera del contexto del teorema.

Ejemplo 9.2.

Usemos la técnica anterior para calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

Solución

Usando la identidad trigonométrica

$$\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right),$$

tendremos que

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \right)^2.$$

Luego, usando los teoremas de álgebra de límite, el límite que debemos calcular se escribe así:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \right) \right]^2.$$

Aquí vemos que basta con hacer el cambio de variables definido por $u = \frac{x}{2}$, ya que si $x \rightarrow 0$ se tiene que $u \rightarrow 0$ por lo tanto todo depende del límite siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \right) \right]^2 \quad \text{“=”} \quad \frac{1}{2} \left(\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} \right)^2.$$

Como este último límite es existente y “bien” conocido, se deduce que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

9.7. Límites Importantes

A continuación revisaremos una lista de cálculos de límites sencillos, que nos permitirán, mediante la combinación de los teoremas anteriores, poder calcular otros límites más complejos.

Límites en Funciones Continuas

Primeramente comenzamos con aquellos límites que se calculan por simple evaluación en $\bar{x}$, es decir aquellos que cumplen $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$. Recordemos que es necesario que $\bar{x} \in \text{Dom}(x)$ y se dice que f es continua en $\bar{x}$.

Dentro de esta clase de funciones tenemos las siguientes:

1. $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} c = c$
2. $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} x = \bar{x}$
3. $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) = a_n \bar{x}^n + \cdots + a_1 \bar{x} + a_0$
4. $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0} = \frac{a_n \bar{x}^n + \cdots + a_1 \bar{x} + a_0}{b_m \bar{x}^m + \cdots + b_1 \bar{x} + b_0}$
5. $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \sqrt{x} = \sqrt{\bar{x}}$
6. $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \sin x = \sin \bar{x}$
7. $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \cos x = \cos \bar{x}$
8. $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \arcsin x = \arcsin \bar{x}$
9. $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} e^x = e^{\bar{x}}$
10. $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \ln x = \ln \bar{x}$

No debemos olvidar que en varios de los ejemplos anteriores $\bar{x}$ debe estar en el correspondiente dominio de la función, que no es necesariamente todo $\mathbb{R}$. (Por ejemplo para $\ln$ necesitamos que $\bar{x} > 0$).

Límites trigonométricos, logarítmicos y exponenciales

Usando el teorema del sandwich y desigualdades conocidas para las respectivas funciones, se establecen las existencias de los siguientes límites importantes fuera de los dominios de las respectivas funciones:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Se espera que cualquier persona que pase satisfactoriamente por un curso de Cálculo, recuerde siempre los valores de estos límites, ya que sirven de base para muchos cálculos más complejos.

◀ Ejercicio

Ejercicio 9.1: Como aplicación directa de los límites básicos y los teoremas de cálculo se pueden calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$

$$\begin{aligned}
3. \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} \\
4. \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} \\
5. \quad & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos x}{\sin(x - \frac{\pi}{3})} \\
6. \quad & \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) \quad \left(= \frac{2}{\pi}\right)
\end{aligned}$$

9.8. Límite a través de un subconjunto del dominio

Ejemplo de Motivación. Consideremos la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \in \mathbb{I} \\ \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Para calcular el límite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ nos gustaría poder tomar por separado los casos $x \in \mathbb{I}$ y $x \in \mathbb{Q}$, de modo de aprovechar que ya sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

En principio, el hacer esta separación, consistiría en tomar sucesiones racionales o irracionales por separado. Sin embargo, la definición nos exige tomar **todas** las sucesiones que convergen a cero (en el dominio de la función), de entre las cuales hay algunas extrañas que son similares a la sucesión $s_n = \frac{1 + \sqrt{2} + (-1)^n \sqrt{2}}{n}$, la cual tiene la propiedad de tender a cero, tomando valores racionales e irracionales en forma alternada.

Para resolver este tipo de problemas es conveniente desarrollar una herramienta que separe al dominio en partes. Por ese motivo, comencemos por introducir la definición siguiente:

DEFINICIÓN (LÍMITE DE UNA FUNCIÓN A TRAVÉS DE UN SUBCONJUNTO)

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sean $B \subseteq A$ y $\bar{x} \in B'$. Diremos que $\ell \in \mathbb{R}$ es el límite de la función f cuando $x \rightarrow \bar{x}$ a través del conjunto B si para cualquier sucesión (x_n) convergente a $\bar{x}$, $x_n \neq \bar{x}$, con valores en B , se tiene que la sucesión $(f(x_n))$ converge a ℓ .

A este límite lo denotaremos por $\ell = \lim_{\substack{x \rightarrow \bar{x} \\ x \in B}} f(x)$

Ejemplos:

$$1. \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in \mathbb{I}}} \cos x = 1$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in \mathbb{Q}}} \cos x = 1$$

$$2. \quad \text{si } f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ \sin x & \text{si } x \in \mathbb{I} \end{cases} \quad \text{entonces } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in \mathbb{Q}}} f(x) = 1 \text{ y } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in \mathbb{I}}} f(x) = 0$$

Respecto a la definición anterior, podemos demostrar un primer teorema que nos enseña qué pasa cuando el límite "normal" de una función existe.

Teorema 9.5. Si $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{x}, \ell \in \mathbb{R}$ son tales que $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = \ell$, entonces para cualquier subconjunto $B \subseteq A$ tal que $\bar{x} \in B'$ se tiene que $\lim_{\substack{x \rightarrow \bar{x} \\ x \in B}} f(x) = \ell$.

Observación: A pesar de que la hipótesis del teorema anterior es muy fuerte (existencia del límite global), podemos usar el contra recíproco para establecer las siguientes consecuencias: Si $B, C \subseteq A$ y $\bar{x} \in B'$ y $\bar{x} \in C'$ entonces:

1. $\lim_{\substack{x \rightarrow \bar{x} \\ x \in B}} f(x)$ no existe $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x)$ no existe.
2. $\lim_{\substack{x \rightarrow \bar{x} \\ x \in B}} f(x) = \ell_1 \neq \ell_2 = \lim_{\substack{x \rightarrow \bar{x} \\ x \in C}} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x)$ no existe.

Ejemplo 9.3.

Consideremos la función $f(x) = \frac{|x|}{x}$ y estudiemos el límite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

1. Estudiemos primeramente el caso $x > 0$. Claramente, si $x > 0$ se tiene que $f(x) = \frac{x}{x} = 1$. Por lo tanto $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$.
2. Si ahora consideramos el caso $x < 0$ tenemos que $f(x) = \frac{-x}{x} = -1$. Por lo tanto $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$.

Como ambos límites son diferentes, se concluye que no existe el $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

A continuación enunciamos el teorema que nos permite validar matemáticamente la idea que teníamos en el ejercicio de motivación a este tema, es decir, calcular primero los límites a través de conjuntos apropiados y concluir sobre el límite global.

Teorema 9.6. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A'$. Sean $B, C \subseteq A$ tales que $\bar{x} \in B'$, $\bar{x} \in C'$ y $B \cup C = A$.

Si $\lim_{\substack{x \rightarrow \bar{x} \\ x \in B}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow \bar{x} \\ x \in C}} f(x) = \ell$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = \ell.$$

9.9. Límites laterales

En principio, los límites laterales de una función son un caso particular de límite a través de un subconjunto de su dominio. Sin embargo, la técnica de estudiar los límites laterales de una función es tan usada, que merece revisar las consecuencias de este cálculo particular.

DEFINICIÓN Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Si denotamos por $A^+ = A \cap (\bar{x}, +\infty)$ y $A^- = A \cap (-\infty, \bar{x})$, entonces:

- i) Se llama límite lateral por la derecha de la función f en $\bar{x}$ a $\lim_{\substack{x \rightarrow \bar{x} \\ x \in A^+}} f(x)$.
- ii) Análogamente, a $\lim_{\substack{x \rightarrow \bar{x} \\ x \in A^-}} f(x)$ se le llama límite lateral por la izquierda de la función f en $\bar{x}$.

El límite lateral por la derecha se denota por $\lim_{\substack{x \rightarrow \bar{x} \\ x > \bar{x}}} f(x)$ o $\lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} f(x)$ y el límite lateral por la izquierda se denota por $\lim_{\substack{x \rightarrow \bar{x} \\ x < \bar{x}}} f(x)$ o bien por $\lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} f(x)$.

Observación: Usando los resultados teóricos de la sección de límites a través de subconjuntos del dominio de una función, se deduce que si $\bar{x} \in (A^+)' \cap (A^-)'$ y $\bar{x} \notin A$ entonces se tiene que:

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} f(x) = \ell.$$

En el caso en que $\bar{x} \in A$ la equivalencia es la siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} f(x) = \ell = f(\bar{x}).$$

Esta última equivalencia es muy popular y se enuncia informal y frecuentemente diciendo que una función es continua cuando sus límites laterales son iguales a $f(\bar{x})$.

9.10. Caracterización de límite sin uso de sucesiones

A continuación enunciamos un teorema que caracteriza completamente la noción de límite cambiando el rol de las sucesiones por el de las letras griegas ε y δ . En la jerga del tema se conoce esta caracterización como la definición ε - δ del límite y en muchos textos, suele ser tomada como el punto de partida del estudio de límites.

Teorema 9.7 (Caracterización ε - δ de límite). Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{x}$ punto de acumulación de A entonces

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \cap ([\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta] \setminus \{\bar{x}\}), \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Observación: La caracterización ε - δ de los límites laterales es análoga, realizando el cambio que corresponde a exigir que sólo se consideran los valores de x de un lado de $\bar{x}$, es decir:

- Si $\bar{x}$ es punto de acumulación de $A \cap (\bar{x}, +\infty)$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \cap (\bar{x}, \bar{x} + \delta], \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

- Si $\bar{x}$ es punto de acumulación de $A \cap (-\infty, \bar{x})$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \cap [\bar{x} - \delta, \bar{x}), \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Observación: La frase $\forall x \in A \cap [\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta]$ que aparece en la caracterización, suele ser escrita usando un implica. De este modo se escriben:

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \left[0 < |x - \bar{x}| \leq \delta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon \right].$$

10. Límites infinitos y hacia el infinito

En la sección anterior hemos definido el límite de una función cuando $x \rightarrow \bar{x}$ o bien cuando x se aproxima a $\bar{x}$ por uno de los costados. Para que estas definiciones fueran coherentes el punto $\bar{x}$ debía ser adherente al dominio de la función. En esta sección, extenderemos el concepto de límite al caso en que la variable $x \rightarrow +\infty$ o bien decrece hacia $-\infty$. Para que las definiciones de esta sección sean coherentes, necesitaremos considerar funciones con dominios no acotados.

Es interesante notar que en el capítulo de sucesiones, ellas eran funciones con dominio $\mathbb{N}$, el cual no es acotado superiormente: Allí, la variable n se movía de modo que en los límites $n \rightarrow +\infty$. Por ese motivo, veremos que esta sección es muy similar a la de sucesiones, desde la definición de límite hasta los teoremas de unicidad, álgebra y sandwich. Muchas de las demostraciones son copia directa de las correspondientes en sucesiones.

10.1. Límites hacia $\pm\infty$

DEFINICIÓN Sea $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y sea ℓ un real fijo.

i) Si A no es acotado superiormente entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists m > 0, \forall x \in A \cap [m, \infty), \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

ii) Si A no es acotado inferiormente entonces

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists m < 0, \forall x \in A \cap (-\infty, m], \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Es fácil ver que la analogía con la definición de límite de sucesiones implica que los teoremas de unicidad del límite, álgebra de límites, sandwich y límites importantes siguen siendo válidos en límite de funciones cuando $x \rightarrow \pm\infty$. En particular,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0} &= \begin{cases} 0 & \text{si } n < m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \\ \nearrow & \text{si } n > m \end{cases} \end{aligned}$$

Observación: Para el caso cuando $x \rightarrow -\infty$, observamos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x)$$

por lo tanto las propiedades de estos límites son análogas a las de $x \rightarrow +\infty$. En particular,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0} &= \begin{cases} 0 & \text{si } n < m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \\ \nearrow & \text{si } n > m \end{cases} \end{aligned}$$

Teorema 10.1 (Unicidad del límite). Si $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell_1$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell_2$ entonces $\ell_1 = \ell_2$.

Teorema 10.2 (Álgebra). Si $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones tales que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell_1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell_2$ y $A \cap B$ es no acotado superiormente, entonces

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} (f + g)(x) &= \ell_1 + \ell_2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (f - g)(x) &= \ell_1 - \ell_2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (f \cdot g)(x) &= \ell_1 \cdot \ell_2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f}{g} \right)(x) &= \frac{\ell_1}{\ell_2}, \quad \text{si } \ell_2 \neq 0.\end{aligned}$$

Teorema 10.3 (Sandwich). Si tres funciones f, g, h con dominios A, B, C respectivamente son tales que $\exists m$, tal que $\forall x \in B \cap [m, \infty)$ se cumple $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Entonces, si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \ell$, se tiene que $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \ell$.

DEMOSTRACIÓN. Las demostraciones son realmente análogas a las realizadas en sucesiones y se proponen como ejercicio. Además se propone como ejercicio, enunciar y demostrar estos tres teoremas para el caso en que $x \rightarrow -\infty$ $\square$

Ejemplo 10.1.

Calcular los límites $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}}$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$.

Razonamiento formal:

Antes de resolver el problema hagamos un razonamiento puramente formal y sin mayor justificación: Observamos que cuando $x \rightarrow +\infty$ se tiene que $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ y por lo tanto $e^{\frac{1}{x}} \rightarrow e^0 = 1$. De este modo, el segundo límite es el producto de una función no acotada (x) multiplicada por una que converge a cero ($e^{\frac{1}{x}} - 1$).

Solución:

Usamos la desigualdad de la exponencial de modo que si $x > 1$ se tiene que

$$\frac{1}{x} + 1 \leq e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}.$$

De aquí, vemos que cuando $x \rightarrow +\infty$, las dos cotas convergen a 1. Por lo tanto, usando Sandwich de funciones se concluye $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$.

Para el segundo límite, usamos la misma desigualdad, restando 1 y multiplicando por x . De este modo se tiene que

$$1 \leq x(e^{\frac{1}{x}} - 1) \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}.$$

Aquí, nuevamente usando Sandwich se obtiene que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = 1$.

Asíntotas (I)

Cuando una función tiene límite ℓ hacia $\pm\infty$, su gráfico se aproxima hacia la recta $y = \ell$. Por esta razón, esta recta se llama asíntota horizontal de f . Más precisamente se tiene la siguiente definición

DEFINICIÓN (ASÍNTOTAS HORIZONTALES)

1. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell_1$ entonces la recta $y = \ell_1$ se llama asíntota horizontal de f .
2. Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell_2$ entonces la recta $y = \ell_2$ es otra asíntota horizontal de f .

Observación: Notemos que una función con dominio no acotado hacia $\pm\infty$ puede tener dos asíntotas horizontales, una hacia $+\infty$ y otra hacia $-\infty$.

En muchos casos estas asíntotas coinciden, como por ejemplo en las funciones racionales. Veamos el siguiente caso particular:

$f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ tiene la asíntota horizontal $y = 2$ cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

10.2. Límites infinitos

Cuando una función crece sin cota al aproximarse a $\bar{x}$, por la derecha o la izquierda o cuando $x \rightarrow \pm\infty$ se dice que su límite es $+\infty$. Las definiciones formales de estos conceptos son las siguientes:

DEFINICIÓN (LÍMITES IGUAL A $+\infty$) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Si $\bar{x} \in A'$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \cap [\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta], f(x) \geq M.$$

2. Si $\bar{x}$ es punto de acumulación de $A \cap (\bar{x}, +\infty)$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \cap (\bar{x}, \bar{x} + \delta], f(x) \geq M.$$

3. Si $\bar{x}$ es punto de acumulación de $A \cap (-\infty, \bar{x})$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \cap [\bar{x} - \delta, \bar{x}), f(x) \geq M.$$

4. Si A no es acotado superiormente entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0, \exists m > 0, \forall x \in A \cap [m, \infty), f(x) \geq M.$$

5. Si A no es acotado inferiormente entonces

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0, \exists m < 0, \forall x \in A \cap (-\infty, m], f(x) \geq M.$$

Observación: Es importante notar que todas estas definiciones son muy similares, con cambios sutiles, pero fundamentales, que marcan la diferencia entre uno y

otro límite. En este punto es de suma importancia haber adquirido una comprensión adecuada del rol de cada una de las variables y de los cuantificadores que las acompañan, para saber de cual límite se está hablando. A continuación definiremos cuando el límite de una función es igual a $-\infty$ (en los 5 casos de la definición anterior), sin embargo, es un buen ejercicio de aprendizaje, intentar escribir estas 5 definiciones sin mirar el párrafo siguiente y sólo leerlo para corroborar que lo escrito es correcto.

DEFINICIÓN (LÍMITES IGUAL A $-\infty$) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Si $\bar{x} \in A'$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = -\infty \iff \forall M < 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \cap [\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta], f(x) \leq M.$$

2. Si $\bar{x}$ es punto de acumulación de $A \cap (\bar{x}, +\infty)$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} f(x) = -\infty \iff \forall M < 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \cap (\bar{x}, \bar{x} + \delta], f(x) \leq M.$$

3. Si $\bar{x}$ es punto de acumulación de $A \cap (-\infty, \bar{x})$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} f(x) = -\infty \iff \forall M < 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \cap [\bar{x} - \delta, \bar{x}), f(x) \leq M.$$

4. Si A no es acotado superiormente entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \iff \forall M < 0, \exists m > 0, \forall x \in A \cap [m, \infty), f(x) \leq M.$$

5. Si A no es acotado inferiormente entonces

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \iff \forall M < 0, \exists m < 0, \forall x \in A \cap (-\infty, m], f(x) \leq M.$$

Observación: Notemos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty &\iff \lim_{x \rightarrow +\infty} -f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty &\iff \lim_{x \rightarrow +\infty} -f(-x) = +\infty \end{aligned}$$

Es decir, los límites cuando $x \rightarrow \pm\infty$ o con valor $-\infty$ pueden ser derivados del concepto $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ mediante cambios algebraicos apropiados.

Observación:

1. Cuando una función tiene límite igual a $+\infty$ o igual a $-\infty$ se suele decir que posee límite en el conjunto $\overline{\mathbb{R}}$ definido como

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

que suele llamarse $\mathbb{R}$ -extendido.

2. Como las sucesiones son funciones, las definiciones anteriores permiten establecer el significado de las frases $s_n \rightarrow +\infty$ y $s_n \rightarrow -\infty$.

Ejemplos:

1. Probar usando la definición que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$.

Solución: Se debe demostrar que $\forall M > 0, \exists m > 0, \forall x \geq m, f(x) = x \geq M$.

Esta proposición es cierta, ya que basta tomar $m = M$.

2. Probar usando el ejemplo 1 que $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$.

Solución: En este caso basta con observar que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty.$$

3. Probar usando la definición, que si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ y además $\exists m$, tal que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in \text{Dom}(g) \cap [m, \infty)$ entonces $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

Solución: Sabemos que

$$I) \quad \forall M > 0, \exists m' > 0, \forall x \in \text{Dom}(f) \cap [m', \infty), \quad f(x) \geq M$$

$$II) \quad \exists m > 0, \forall x \in \text{Dom}(g) \cap [m, \infty), \quad f(x) \leq g(x).$$

Debemos probar que:

$$\forall M > 0, \exists m'' > 0, \forall x \in \text{Dom}(g) \cap [m'', \infty), \quad g(x) \geq M.$$

Esta última proposición es verdadera, ya que si $M > 0$ es arbitrario, de (I) se deduce la existencia de $m' > 0$, a partir del cual se cumple $f(x) \geq M$. De (II) se deduce que existe $m > 0$ a partir del cual se cumple $f(x) \leq g(x)$. Tomando $m'' = \max\{m, m'\}$ se tendrá que $m'' > 0$ y además

$$\forall x \in \text{Dom}(g) \cap [m'', \infty), \quad g(x) \geq f(x) \geq M.$$

Esto es lo que se quería demostrar.

4. Probar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$.

Solución: En este caso basta con usar la cota

$$\exp(x) \geq 1 + x \geq x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Como $x \rightarrow +\infty$, usando el ejemplo 3 se tiene que $\exp(x) \rightarrow +\infty$.

5. Combinando los ejemplos anteriores,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(-x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\exp(x)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

En la última línea hemos usado el resultado:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Esto lo probaremos como una propiedad.

Propiedad 13.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. En efecto, si recordamos las definiciones se tiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty \\ \iff \forall M > 0, \exists m > 0, \forall x \in \text{Dom}(f) \cap [m, +\infty), \quad f(x) &\geq M \\ \iff \forall M > 0, \exists m > 0, \forall x \in \text{Dom}(f) \cap [m, +\infty), \quad 0 < \frac{1}{f(x)} &\leq \frac{1}{M} \\ \iff \forall \varepsilon > 0, \exists m > 0, \forall x \in \text{Dom}(f) \cap [m, +\infty), \quad 0 < \frac{1}{f(x)} &\leq \varepsilon \\ \implies \forall \varepsilon > 0, \exists m > 0, \forall x \in \text{Dom}(f) \cap [m, +\infty), \quad -\varepsilon &\leq \frac{1}{f(x)} \leq \varepsilon \\ \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} &= 0. \end{aligned}$$

□

6. Probar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.

Solución: Para este ejemplo usaremos la definición, es decir, probaremos que:

$$\forall M > 0, \exists m > 0, \forall x \geq m, \quad \ln(x) \geq M.$$

Para ello, veamos que

$$\ln(x) \geq M \iff x \geq \exp(M)$$

por lo tanto, dado $M > 0$ arbitrario, basta tomar $m = \exp(M)$ y se cumplirá que si $x \geq m$ entonces $\ln(x) \geq M$.

Asíntotas (II)

Cuando una función tiende a $\pm\infty$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$, es posible que su gráfico se aproxime a una recta oblicua. En este caso la recta se llama asíntota oblicua de la función. La definición precisa de este concepto es la siguiente:

DEFINICIÓN (ASÍNTOTAS OBLICUAS)

1. La recta $y = m_1x + n_1$ es una asíntota oblicua de f cuando $x \rightarrow +\infty$ si se cumple que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (m_1x + n_1) = 0.$$

2. Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (m_2x + n_2) = 0$ entonces la recta $y = m_2x + n_2$ es una asíntota oblicua de f cuando $x \rightarrow -\infty$.

Observación: Para calcular las constantes m, n de una eventual asíntota oblicua

podemos observar que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (mx + n) = 0 &\iff n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx \\ &\implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - mx}{x} = 0 \\ &\iff m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}. \end{aligned}$$

Este razonamiento entrega dos fórmulas para calcular m y n

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx.$$

Si ambos límites existen (en particular el segundo) entonces $y = mx + n$ es definitivamente una asíntota oblicua de f .

El mismo cálculo se puede realizar cuando $x \rightarrow -\infty$.

Ejemplo 10.2.

Encontrar las asíntotas oblicuas de la función $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

Solución. Estudiemos la función $\frac{f(x)}{x} = e^{\frac{1}{x}}$. Ya hemos visto anteriormente que esta función tiende a 1 si $x \rightarrow +\infty$. También esto ocurre si $x \rightarrow -\infty$ (propuesto). Por lo tanto $m = 1$.

Ahora estudiamos la expresión $f(x) - mx = x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$. También hemos estudiado este límite y se concluye que $n = 1$.

Por lo tanto, esta función tiene como asíntota oblicua a la recta $y = x + 1$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

DEFINICIÓN (ASÍNTOTAS VERTICALES) Si $\lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} f(x) = \pm\infty$, se dice que la recta $x = \bar{x}$ es una asíntota vertical de f .

Teorema de composición (I)

Teorema 10.4. Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

Entonces, si el dominio de la composición $f \circ g$ no es acotado superiormente, se cumple que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ g)(x) = \ell.$$

Observación: En general, la existencia de los dos límites por separado no garantiza que el dominio de la composición no sea acotado, en efecto, si por ejemplo si $A = B = \mathbb{Q}$ y $g(x) = x\sqrt{2}$, entonces $\text{Dom}(f \circ g) = \{0\}$.

Por esta razón, en el teorema se ha agregado la hipótesis “el dominio de la composición $f \circ g$ no es acotado superiormente”

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, es decir que

$$\begin{aligned} I) \quad & \forall \varepsilon > 0, \exists m > 0, \quad \forall x \in A \cap [m, \infty) \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon \\ II) \quad & \forall M > 0, \exists m' > 0, \forall x \in B \cap [m', +\infty) \quad g(x) \geq M. \end{aligned}$$

Debemos demostrar que $\lim_{x \rightarrow \infty} (f \circ g)(x) = \ell$, es decir, si llamamos $C = \text{Dom}(f \circ g)$:

$$\text{PDQ.: } \forall \varepsilon > 0, \exists m'' > 0, \quad \forall x \in C \cap [m'', \infty) \quad |(f \circ g)(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Antes de comenzar la demostración, recordemos la definición de $C = \text{Dom}(f \circ g)$:

$$C = \{x \in B : g(x) \in A\}.$$

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, usando el dato (I) sabemos que existe $m > 0$, para el cual se cumple

$$\forall z \in A \cap [m, \infty) \quad |f(z) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Usando ahora el dato (II) en el caso particular en que $M = m$, se tiene que existe $m' > 0$ de modo que

$$\forall x \in B \cap [m', \infty), \quad g(x) \geq m.$$

Por lo tanto, $\forall x \in C \cap [m', \infty)$ podemos realizar lo siguiente:

1. $x \in B \cap [m', +\infty)$, de donde se deduce que $g(x) \geq m$.
2. Como $x \in C$ se cumple además que $g(x) \in A$, es decir $z = g(x) \in A \cap [m, \infty)$, se donde se concluye que

$$|f(g(x)) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Con esto concluye la demostración con $m'' = m'$.

□

Ejemplo 10.3.

En sucesiones se estudio la sucesión $s_n = a^n$ encontrándose que el límite dependía del valor de a .

Ahora en funciones estudiemos la función $f(x) = a^x$ donde $a > 0$.

Sabemos que por definición, se cumple

$$f(x) = \exp(x \ln a).$$

Luego, para calcular el límite cuando $x \rightarrow +\infty$ hacemos el cambio de variable (uso del teorema de la composición) $u = x \ln a$. Sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ -\infty & \text{si } a < 1 \\ 0 & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, el límite requerido será igual a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \begin{cases} \lim_{u \rightarrow +\infty} \exp(u) & \text{si } a > 1 \\ \lim_{u \rightarrow -\infty} \exp(u) & \text{si } a < 1 \\ 1 & \text{si } a = 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ 0 & \text{si } a < 1 \\ 1 & \text{si } a = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Es decir,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ 0 & \text{si } a < 1 \\ 1 & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

Ejemplo 10.4.

Otra sucesión interesante es $s_n = na^n$ cuando $|a| < 1$.

Ahora en funciones estudiemos la función $f(x) = xa^x$ donde $a \in (0, 1)$ cuando $x \rightarrow +\infty$.

Sabemos que por definición, se cumple

$$f(x) = x \exp(x \ln a) = \frac{x}{\exp(-x \ln a)}.$$

Aquí, tanto el numerador como el denominador tienden a $+\infty$. Por esta razón, necesitamos una desigualdad donde se compare la exponencial con las potencias de x cuando $x \rightarrow +\infty$.

Una primera desigualdad es

$$\exp u \geq 1 + u,$$

pero aquí la cota es lineal en u . Una desigualdad más fuerte cuando $u > 0$ es la siguiente;

$$\exp u = \left(\exp \frac{u}{2} \right)^2 \geq \left(1 + \frac{u}{2} \right)^2 = 1 + u + \frac{u^2}{2} \geq \frac{u^2}{2}.$$

Con esta desigualdad podemos decir que, para $u = -x \ln a > 0$ se tiene que

$$0 \leq \frac{x}{\exp(-x \ln a)} \leq \frac{2x}{x^2 \ln^2 a}.$$

Por lo tanto, usando Sandwich se concluye que $\lim_{x \rightarrow +\infty} xa^x = 0$, cuando $a \in (0, 1)$.

Como casos particulares se concluye que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0, \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0.$$

(En el último, se usa el cambio de variable $x = \ln u$ para transformarlo en el primero).

¿Puede cortarse una asíntota horizontal?

En muchos ejemplos se observa que los gráficos de las funciones se aproximan a sus asíntotas horizontales en forma asintótica sin cortarlas. O sea $f(x) \rightarrow \ell$ cuando $x \rightarrow +\infty$ pero no ocurre que $f(x) = \ell$.

Esto que ocurre en algunos ejemplos no es una generalidad, como lo muestra la función $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ que tiene como asíntota horizontal la recta $y = 0$, y cumple con $f(x) = 0$ para $x = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$.

A pesar de esto el caso en que la función no corta a su asíntota es útil para las aplicaciones que siguen.

Un caso particular es el de la función $\frac{1}{x}$. En este caso sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Pero, podemos ser más precisos y ver que cuando $x > 0$ se tiene que $\frac{1}{x} > 0$ y que cuando $x < 0$ se tiene que $\frac{1}{x} < 0$.

Desde el punto de vista gráfico, esto dice que $\frac{1}{x}$ se aproxima a la recta $y = 0$ por arriba (cuando $x \rightarrow +\infty$) y por abajo (cuando $x \rightarrow -\infty$).

Para enfatizar este comportamiento diremos que

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} &= 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} &= 0^-.\end{aligned}$$

Esta notación se puede precisar más en la siguiente definición

DEFINICIÓN (LÍMITE IGUAL A ℓ^+ O ℓ^-) 1. Diremos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell^+$ si se cumple que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \quad \text{y} \quad \exists m > 0, \forall x \in \text{Dom}(f) \cap [m, +\infty), f(x) > \ell.$$

2. Diremos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell^-$ si se cumple que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \quad \text{y} \quad \exists m > 0, \forall x \in \text{Dom}(f) \cap [m, +\infty), f(x) < \ell.$$

3. Análogamente se definen los límites $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell^+$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell^-$.

Observación: Con las definiciones anteriores, vemos que la definición de límite se puede escribir en al menos 25 formas distintas, combinando el hecho que la variable x puede tender a $\bar{x}$, $\bar{x}^+$, $\bar{x}^-$, $+\infty$ o $-\infty$ y la función f puede tender a ℓ , ℓ^+ , ℓ^- o bien a $\pm\infty$.

Ejemplo 10.5.

$$\blacksquare f(x) = \sqrt{\frac{x^4+1}{x^2-1}}$$

Solución

El dominio de la función es $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$. Como $f(x)$ es par basta estudiar su comportamiento solamente en el intervalo $(1, \infty)$.

Como $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$, tenemos que $x = 1$, es una asíntota vertical y como f es par entonces la recta $x = -1$ también es una asíntota vertical.

Veamos ahora las asíntotas en ∞

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^4+1}{x^4-x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1+\frac{1}{x^4}}{1-\frac{1}{x^2}}} = 1 = m.$$

Por otro lado tenemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^4+1}{x^2-1}} - x.$$

Desarrollemos un poco la última expresión

$$\sqrt{\frac{x^4+1}{x^2-1}} - x = \sqrt{\frac{x^4+1}{x^2-1}} - \sqrt{\frac{x^2(x^2-1)}{(x^2-1)}} = \frac{\sqrt{x^4+1} - \sqrt{x^4-x^2}}{\sqrt{(x^2-1)}}.$$

Multipliquemos la última expresión por $1 = \frac{\sqrt{x^4+1}+\sqrt{x^4-x^2}}{\sqrt{x^4+1}+\sqrt{x^4-x^2}}$

$$= \frac{\sqrt{x^4+1}-\sqrt{x^4-x^2}}{\sqrt{(x^2-1)}} \cdot \frac{\sqrt{x^4+1}+\sqrt{x^4-x^2}}{\sqrt{x^4+1}+\sqrt{x^4-x^2}} = \frac{x^4+1-x^4+x^2}{\sqrt{(x^2-1)} \cdot (\sqrt{x^4+1}+\sqrt{x^4-x^2})}$$

$$= \frac{1+x^2}{\sqrt{(x^2-1)} \cdot (\sqrt{x^4+1}+\sqrt{x^4-x^2})} = \frac{\frac{1}{x^2}+1}{\sqrt{(x^2-1)} \cdot \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}.$$

Si tomamos el límite cuando $x \rightarrow \infty$ a la última expresión obtendremos $\left(\frac{1}{\infty \cdot 2}\right) \rightarrow 0$. Por lo tanto $n = 0$.

Con esto la asíntota oblicua será $y = x$.

Un gráfico de esta función se muestra en la figura ??

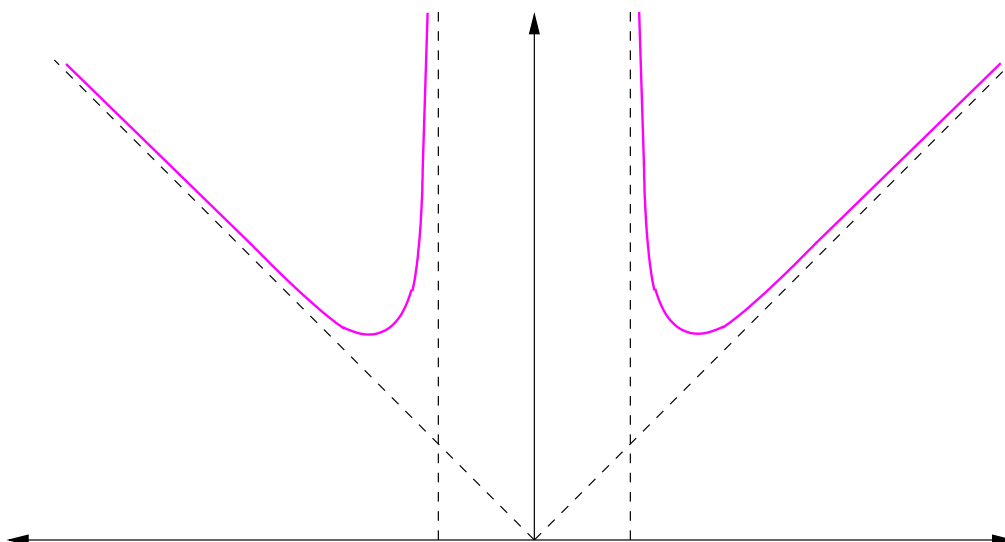


Figura 14: Gráfico de la función estudiada en el Ejemplo ??