

CÁLCULO DE DERIVADAS

1) Calcula la derivada de las siguientes funciones:

$$\text{a) } y = \ln \frac{4-5x}{2x+3} \quad \text{b) } y = \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}$$

Solución:

$$\text{a) } y = \ln \frac{4-5x}{2x+3} = \ln(4-5x) - \ln(2x+3)$$

$$y' = \frac{-5}{4-5x} - \frac{2}{2x+3} = \frac{-5(2x+3) - 2(4-5x)}{(4-5x) \cdot (2x+3)} = \frac{-23}{(4-5x) \cdot (2x+3)}$$

$$\text{b) } y' = \frac{\cos x \cdot x^2 - \operatorname{sen} x \cdot 2x}{x^4} = \frac{\cos x \cdot x - 2\operatorname{sen} x}{x^3}$$

2) Calcula la derivada de las siguientes funciones:

$$\text{a) } y = \frac{3^{5x}}{2x-1} \quad \text{b) } y = 3^x \cdot \cos(x^2-1)$$

Solución:

$$\text{a) } y' = \frac{5 \cdot 3^{5x} \cdot \ln 3 (2x-1) - 2 \cdot 3^{5x}}{(2x-1)^2} = \frac{3^{5x} \cdot [5(2x-1) \cdot \ln 3 - 2]}{(2x-1)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } y' &= 3^x \cdot \ln 3 \cdot \cos(x^2-1) - 3^x \cdot \operatorname{sen}(x^2-1) \cdot 2x = \\ &= 3^x \cdot [\ln 3 \cdot \cos(x^2-1) - 2x \cdot \operatorname{sen}(x^2-1)] \end{aligned}$$

3) Calcula la derivada de las siguientes funciones:

$$\text{a) } y = \ln \frac{1-e^x}{1+e^x} \quad \text{b) } y = \sqrt[3]{\cos(x^3-1)}$$

Solución:

$$\text{a) } y = \ln(1-e^x) - \ln(1+e^x)$$

$$y' = \frac{-e^x}{1-e^x} - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{-e^x \cdot (1+e^x) - e^x \cdot (1-e^x)}{(1-e^x) \cdot (1+e^x)} = \frac{-2e^x}{1-e^{2x}}$$

$$\text{b) } y' = \frac{-\operatorname{sen}(x^3-1) \cdot 3x^2}{3\sqrt[3]{\cos^2(x^3-1)}} = \frac{-x^2 \cdot \operatorname{sen}(x^3-1)}{\sqrt[3]{\cos^2(x^3-1)}}$$

4) Calcula la derivada de las siguientes funciones:

$$\text{a) } y = 4 \cdot \arccos \sqrt{x} \qquad \text{b) } y = \log_3(x^2 - 4)$$

Solución:

$$\text{a) } y' = \frac{-4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}} = \frac{-2}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x}}$$

$$\text{b) } y' = \frac{2x}{\ln 3 \cdot (x^2 - 4)}$$

5) Calcula la derivada de las siguientes funciones:

$$\text{a) } y = 5 \cdot \arctg(2x - 1) \qquad \text{b) } y = \sqrt[3]{x^5 + 2}$$

Solución:

$$\text{a) } y' = \frac{5 \cdot 2}{1 + (2x - 1)^2} = \frac{10}{1 + (2x - 1)^2}$$

$$\text{b) } y' = \frac{5x^4}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^5 + 2)^2}}$$

6) Aplica la derivación logarítmica para derivar $y = x^{\cos x}$ **Solución:**

$$f(x) = x^{\cos x}$$

$$\ln f(x) = \cos x \cdot \ln x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\sin x \cdot \ln x + \cos x \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = f(x) \cdot \left(-\sin x \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x} \right) = x^{\cos x} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x} \right)$$

7) Deriva logarítmicamente la siguiente función $y = (\cos x)^x$ **Solución:**

$$f(x) = (\cos x)^x$$

$$\ln f(x) = x \cdot \ln \cos x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln \cos x + x \cdot \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} = \ln \cos x - x \cdot \operatorname{tg} x$$

$$f'(x) = f(x) \cdot (\ln \cos x - x \operatorname{tg} x) = (\cos x)^x \cdot (\ln \cos x - x \operatorname{tg} x)$$

8) Aplica la derivación logarítmica para derivar $y = (x + 1)^{x^2}$

Solución:

$$f(x) = (x + 1)^{x^2}$$

$$\ln f(x) = x^2 \cdot \ln(x + 1)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2x \cdot \ln(x + 1) + x^2 \cdot \frac{1}{x + 1}$$

$$f'(x) = f(x) \cdot \left(2x \cdot \ln(x + 1) + \frac{x^2}{x + 1} \right) = (x + 1)^{x^2} \cdot \left(2x \cdot \ln(x + 1) + \frac{x^2}{x + 1} \right)$$

9) Mediante la derivación logarítmica, calcula la derivada de $y = (\ln x)^x$.

Solución:

$$f(x) = (\ln x)^x$$

$$\ln f(x) = x \cdot \ln(\ln x)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(\ln x) + x \cdot \frac{1}{\ln x} = \ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}$$

$$f'(x) = f(x) \cdot \left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right) = (\ln x)^x \cdot \left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right)$$

10) Aplica la derivación logarítmica para derivar:

$$y = \left(\frac{2}{x} \right)^x$$

Solución:

$$f(x) = \left(\frac{2}{x} \right)^x \rightarrow \ln f(x) = x \cdot \ln \left(\frac{2}{x} \right)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln\left(\frac{2}{x}\right) + x \cdot \frac{\frac{-2}{x^2}}{\frac{2}{x}} = \ln\left(\frac{2}{x}\right) - 1$$

$$f'(x) = f(x) \cdot \left(\ln\left(\frac{2}{x}\right) - 1 \right) = \left(\frac{2}{x}\right)^x \cdot \left(\ln\left(\frac{2}{x}\right) - 1 \right)$$

11) Calcula la derivada de la siguiente función implícita: $xy - 2x + 3y = 4$.

Solución:

$$y + xy' - 2 + 3y' = 0$$

$$y' \cdot (x+3) = 2-y \rightarrow y' = \frac{2-y}{x+3}$$

12) Halla la derivada de la siguiente función implícita: $x^3 + 6xy + y^3 = 8$.

Solución:

$$3x^2 + 6y + 6xy' + 3y^2 \cdot y' = 0$$

$$3y' \cdot (2x + y^2) = -3 \cdot (x^2 + 2y)$$

$$y' = \frac{-(x^2 + 2y)}{2x + y^2}$$

13) Dada la función implícita $x^2 - 3xy - 2y^2 = 4$, calcula su derivada.

Solución:

$$2x - 3y - 3xy' - 4yy' = 0$$

$$2x - 3y = y' \cdot (3x + 4y)$$

$$y' = \frac{2x-3y}{3x+4y}$$

14) Halla y' sabiendo que: $x^2 + y^2 = x^2 \cdot y^2$.

Solución:

$$2x + 2yy' = 2xy^2 + 2x^2yy'$$

$$2yy' \cdot (1 - x^2) = 2x \cdot (y^2 - 1)$$

$$y' = \frac{x \cdot (y^2 - 1)}{y \cdot (1 - x^2)}$$

15) Calcula la derivada de la siguiente función implícita: $4x^2 + 9y^2 = 36$.

Solución:

$$8x + 18yy' = 0$$

$$y' = \frac{-8x}{18y}$$

16) Sabiendo que la derivada de $f(x) = \cos x$ es $f'(x) = -\operatorname{sen} x$, calcula la derivada de $f^{-1}(x) = \arccos x$.

Solución:

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-\operatorname{sen}(\arccos x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

17) Teniendo en cuenta que la derivada de la función $f(x) = \operatorname{tg} x$ es $f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, halla la derivada de $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$.

Solución:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{1 + (\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x))^2} = \frac{1}{1 + x^2}$$

18) Conocida la función $f(x) = \ln x$ y su derivada $f'(x) = \frac{1}{x}$, calcula la derivada de $f^{-1}(x) = e^x$.

Solución:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x$$

19) Dada la función $f(x) = e^x$ y conocida su derivada $f'(x) = e^x$. Halla la derivada de la función $f^{-1}(x) = \ln x$.

Solución:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

20) Conocida la función $f(x) = x^5$ y su derivada $f'(x) = 5x^4$. Calcula la derivada de $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x}$

Solución:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{5 \cdot \sqrt[5]{x^4}}$$

21) Demuestra que todas las derivadas de orden par de la función $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ se anulan para el valor $x = \pi$.

Solución:

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4} \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$f'''(x) = \frac{+1}{8} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$f^{IV}(x) = \frac{+1}{16} \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

...

En general, las derivadas de orden par son de la forma:

$$f^{2n}(x) = k \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right), \text{ donde } k \text{ es una constante}$$

Por tanto se anulan todas en $x = \pi$, pues $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

22) Prueba que la función $f(x) = \ln \cos x$, verifica la siguiente igualdad:

$$f''(x) = \frac{-1}{e^{2f(x)}}$$

Solución:

$$f'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x \qquad f''(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f(x) = \ln \cos x \quad \rightarrow \quad e^{f(x)} = \cos x$$

$$\text{Por tanto, } f''(x) = \frac{-1}{e^{2f(x)}}.$$